Matematici Economice Generale

VALER NIMINEȚ

Vasiliana '98

Scanned with OKEN Scanner

Referent ştiinţific:
Prof.univ.dr. Mihai Anastasiei

ISBN 978-606-520-183-5

Editura **Vasiliana '98**
Tel: 0332421250

Redactor: *Florentin Busuioc*

Apărut 2008
Iaşi - România

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ CU APLICAȚII ÎN ECONOMIE

1. TRANSFORMĂRI ELEMENTARE SISTEME ALGEBRICE DE ECUAȚII LINIARE

1.1. Matrice echivalente

Fie dată matricea dreptunghiulară

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\dim A = m \times n,\ a_{ij} \in \mathbf{R},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Dacă $n = m$, atunci A este o matrice pătratică având ordinul n (se notează ord $A = n$).

Matricea de forma

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

poartă numele de **matrice triunghiulară**.

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog se poate defini o matrice A_2 în care toate elementele situate deasupra diagonalei principale sunt nule.

Matricea de forma

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; ordA_3 = n,$$

poartă numele de **matrice diagonală**, unde $a_{ii}, i = \overline{1,n}$ pot fi şi nule.

Definiția 1.1.1. *Prin **transformări elementare** definite într-o matrice oarecare A, vom înțelege următoarele operații :*

i1) Înmulțirea elementelor unei linii (coloane) cu un scalar nenul.

i2) Adunarea elementelor unei linii (coloane) la elementele corespunzătoare ale altei linii (coloane).

i3) Înmulțirea elementelor unei linii (coloane) cu un scalar nenul şi apoi adunarea lor la elementele corespunzătoare altei linii (coloane).

i4) Schimbarea elementelor unei linii (coloane) cu elementele altei linii (coloane).

Definiția 1.1.2. *Două matrice A şi B sunt **echivalente** dacă se obține una din cealaltă prin intermediul unor transformări elementare.*

Notație. Dacă A şi B sunt **echivalente**, se notează $A \sim B$ sau $A \Leftrightarrow B$.

Exemplul..

Să se obțină prin intermediul transformărilor elementare o matrice echivalentă cu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3 & -3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}=A_1;$$

$$A\sim A_1.$$

A_1 s-a obținut din A, înmulțind linia întâi din A cu 3 și linia întâi din A se adună la linia a treia.

Acest lucru se notează

$$3L_1\to L_1$$

$$L_1+L_3\to L_3$$

Se pot face oricâte asemenea transformări elementare.

1.2. Rangul unei matrice

Fie

$$(r_1)\qquad A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},\ a_{ij}\in\mathrm{R},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Definiția 1.2.1. *Prin **rangul** matricei A, vom înțelege ordinul maxim al determinantului diferit de zero ce se poate construi cu elementele matricei A.*

În mod evident

(r_2) $rangA\le\min(m,n)$; $\dim A=m\times n$.

Teorema 1.2.1. Rangul unei matrice A nu se schimbă prin transformări elementare.

Demonstrație. Presupunem că rangul lui A este p. deci cu ajutorul elementelor din A putem să construim determinantul

Scanned with OKEN Scanner

diferit de zero de ordinul p şi toţi determinanţii de ordin p + 1 sunt nuli.

Fie

$$(r_3)\quad \Delta_p = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

cu $\Delta_p \neq 0$ şi oricare $\Delta_{p+1} = 0$, atunci Δ_p se numeşte **determinant principal**.

Determinanţii de ordin p + 1 se obţin din Δ_p prin bordarea la dreapta cu fiecare coloană a matricei A, începând cu coloana C_{p+1} şi respectiv dedesubt cu fiecare linie a matricei A, începând cu linia L_{p+1}.

Dacă asupra matricei A se efectuează o transformare elementară pe linie de tipul i1), adică :

$(r_4)\quad A \sim A_1$, unde $L_i \to L_i(k)$, i fixat, $i \in \{1,...,m\}$, $k \neq 0$,

atunci constatăm următoarele :

- Dacă linia L_i figurează printre liniile determinantului principal, atunci acest determinant principal se poate exprima astfel :

$(r_5)\quad \Delta'_p = k \cdot \Delta_p \neq 0$, pentru că $k \neq 0, \Delta_p \neq 0$.

- Aşadar $(r_6)\quad rang A_1 \geq p$.

Dar pe baza acestei precizări şi a modului de construire a determinantului de ordin p+1, prin bordarea lui Δ_p, rezultă că toţi

Scanned with OKEN Scanner

determinanții de ordin $p+1$ corespunzători lui A_1, vor avea același factor k, deci

$$\Delta'_{p+1} = k \cdot \Delta_p = 0,$$

pentru că $\Delta_p = 0$.

Deci

(r_7) $rang A_1 = p$.

Concluzie. Rangul unei matrice este un invariant în raport cu transformările elementare (de tipul linii, coloane). În mod analog se arată că rangul lui A rămâne un invariant în raport cu celelalte transformări elementare.

Observație. Pe baza teoremei precedente, rezultă că determinarea rangului matricei A se face prin intermediul unei forme diagonale D, asociată matricei A :

(r_8) $rang A = rang D =$ numărul de elemente de pe diagonala principală a matricei D.

Această observație este adevărată întotdeauna, deoarece orice altă formă diagonală corespunzătoare, a unei matrice date, are proprietatea că numărul elementelor diferite de zero de pe diagonala principală este același. Dacă prin transformări elementare pe linii și coloane ajungem la stabilirea numărului maxim de elemente pivot, atunci acel număr reprezintă în același timp rangul matricei A.

1.3. Matricele transformărilor

Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\dim A = m \times n$.

Scanned with OKEN Scanner

Vom arăta că transformările elementare pe linii şi coloane se pot înlocui prin înmulţiri de matrice, astfel, dacă asupra lui A se efectuează o transformare elementară pe linii de tipul i1)

$$A \sim A_1$$

$$L_1(k) \to L_1$$

atunci avem :

(r_9) $A_1 = P_1 A$

unde matricea P_1 se obţine din matricea unitate la stânga E_s, asociată matricei A şi efectuând asupra ei transformările elementare de tipul i1) menţionate mai sus.

Reciproc, dată fiind matricea dreptunghiulară A având $\dim A = m \times n$, putem să construim două matrice unitate, matricea unitate la stânga E_s care are ordinul m, numărul liniilor matricei A şi respectiv matricea unitate la dreapta E_d, care are ordinul n, numărul coloanelor matricei A.

Revenind la relaţia (r_9), va trebui să arătăm cum se construieşte P_1.

(r_{10})
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \underset{L_1(k) \to L_1}{\sim} A_1 = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$E_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \sim P_1 = \begin{pmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix}, \; ordE_s = m$$

Scanned with OKEN Scanner

$$P_1 \cdot A = \begin{pmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A_1$$

Deci relația (r_9) este dovedită.

Pornind de la relația

(r_{11}) $A \sim A_1 = P_1 \cdot A$

putem continua procedeul de efectuare a transformărilor elementare pe linii sau coloane.

Să presupunem că asupra lui A am efectuat o transformare elementară, pe coloane de tipul i1) :

(r_{12}) $A_1 \sim A_2$

$C_1(k) \to C_1$

atunci :

(r_{13}) $A_2 = A_1 Q_1$,

unde Q_1 este o matrice ce se obține pornind de la matricea unitate la dreapta E_d şi efectuând asupra ei transformări elementare pe coloane de tipul i1).

Obținem

(r_{14}) $A \sim A_1 \sim A_2$

(r_{15}) $A_2 = A_1 Q_1 = P_1 A Q_1$.

Continuând procedeul descris mai sus, dar pornind de la A_2, vom obține după efectuarea unei transformări elementare pe linii de tipul i1)

Scanned with OKEN Scanner

(r_{16}) $A_3 = P_2 A_2 = P_2 P_1 A Q_1$

respectiv $A_2 = A_3 Q_2 = P_2 P_1 A Q_2 Q_1$.

După un număr de etape ce nu pot depăşi rangul matricei diagonale D, printr-o relaţie de forma :

(r_{17}) $$D = P_k P_{k-1} \dots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \dots Q_{k-1} Q_k .$$

Dacă notăm

$$P = P_k P_{k-1} \dots P_2 P_1 \text{ şi } Q = Q_1 Q_2 \dots Q_{k-1} Q_k ,$$

atunci avem:

(r_{18}) $$D = PAQ .$$

Matricea P poartă numele de **matricea transformărilor elementare pe linii** şi ea se obţine pornind de la matricea unitate la stânga E_s de ordinul m (numărul liniilor lui A) efectuând asupra ei toate transformările elementare întâlnite în procesul obţinerii formei diagonale D.

Matricea Q se numeşte **matricea transformărilor elementare pe coloane** ce se obţine pornind de la matricea unitate la dreapta E_d de ordinul n (numărul coloanelor lui A).

1.4. Inversa unei matrice

Definiţia 1.4.1. *O matrice pătratică (numărul de linii egal cu numărul de coloane) se numeşte **nesingulară** sau **nedegenerată** dacă determinantul său este diferit de zero.*

Definiţia 1.4.2. *O matrice pătratică A este **inversabilă** dacă există a matrice A^{-1} numită inversa matricei A astfel încât*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

unde I este matricea unitate.

În liceu, pentru aflarea matricei inverse, s-a folosit metoda cu complementi algebrici. În continuare vom prezenta o metodă ce utilizează transformările elementare studiate în paragrafele precedente. Această metodă constă în aplicarea transformărilor

Scanned with OKEN Scanner

elementare numai asupra liniilor unei matrice A până ce aceasta devine matricea unitate. Simultan, aplicăm aceleaşi transformări elementare matricei unitate care va deveni în final matricea inversă căutată A^{-1}.

Exemplu. Pentru matricea

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix},$$ să se calculeze matricea A^{-1}.

Aşezăm alături în acest tabel matricele A şi I pentru a le aplica aceleaşi transformări elementare

A	I	Transformări elementare efectuate
$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	$(-1)L_1+L_2$ $(-1)L_1+L_3$
$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$	$(-1)L_2+L_1$ L_2+L_3
$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$	$\left(\frac{1}{2}\right)L_3+L_1$ $\left(-\frac{1}{2}\right)L_3\to L_3$
$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	
I	A^{-1}	

Scanned with OKEN Scanner

Astfel

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1.5. Sisteme de ecuații liniare

Un sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute are forma generală :

$$(s_1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

unde a_{ij} şi b_i sunt constante ce se cunosc $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ iar x_1, x_2, …, x_n sunt necunoscutele sistemului .

Sistemul (s_1) se poate scrie şi sub forma matriceală

(s_2) $A\cdot X=B$

unde $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ se numeşte **matricea sistemului,**

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ este **matricea necunoscutelor** iar $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ este **matricea termenilor liberi** .

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ **matricea extinsă** ataşată sistemului (s_1) . Vom nota rangA = p şi rang $\overline{A}$ = q.

Teorema 1.5.1. (Kronecker – Capelli) *Sistemul (s_1) are soluție dacă şi numai dacă $p = q$.*

Soluția sistemului (s_1) este unică (sistemul este compatibil determinat) dacă $p = q = n$, unde n este numărul necunoscutelor.

Sistemul are cel puțin o soluție (sistem compatibil nedeterminat) dacă $p = q < n$.

Dacă $p \neq q$ sistemul nu are soluții (sistem incompatibil).

Dacă $p = q = n = m$, soluția unică se poate determina cu regula lui Cramer, sau direct din ecuația matriceală $A \cdot X = B$ rezultă $X = A^{-1} \cdot B$.

Dacă $p = q < n$, atunci sistemul va fi compatibil nedeterminat şi va admite ∞^{n-p} soluții.

Teorema 1.5.2. (Rouché) *Un sistem de ecuații liniare este compatibil dacă şi numai dacă toți determinanții caracteristici sunt nuli.*

Dacă $d \neq 0$ este un minor care determină rangul matricei A, acesta se va numi **minor principal**. Necunoscutele ale căror coeficienți formează minorul principal se numesc **necunoscute principale**, restul fiind **necunoscute secundare**.

Un minor caracteristic se obține prin bordarea minorului principal cu liniile rămase şi coloana termenilor liberi.

Un sistem de ecuații liniare (s_1) în care $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, se numeşte **omogen**.

Orice sistem omogen este compatibil. Dacă $p = q = n$, atunci va admite soluție unică $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Dacă $p = q < n$, atunci va admite soluții diferite de soluția banală.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}.$$

Soluție.

Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ şi } \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

$p = q = 2$, $n = 3$, deci sistemul este compatibil nedeterminat şi admite ∞^{3-2} soluții.

Fie $x_3 = \alpha$ necunoscuta secundară. Atunci

$$x_2 = \alpha - 1 \text{ şi } x_1 = 2 - 2\alpha$$

vor fi necunoscutele principale.

Exemplu.. Să se rezolve sistemul omogen :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

şi

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -2 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$p = q = 4$, $n = 4$, adică $p = q = n$, deci sistemul este compatibil determinat şi admite doar soluția banală $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

1.6. Rezolvarea numerică a sistemelor liniare prin metoda eliminării totale (Gauss – Jordan) şi metoda eliminării parțiale.

A. Metoda eliminării totale (Gauss – Jordan)

Fie sistemul

$$(s_1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pornind de la matricea extinsă a sistemului $\overline{A} = (A|B)$, se va obține succesiv $(A|B) \Rightarrow \left(A^{-1}A \middle| A^{-1}B\right) \Rightarrow (I|X)$ unde I este matricea unitate de ordin n.

Astfel, va trebui să facem transformări elementare în matricea extinsă $(A|B)$ încât în locul matricei A să apară matricea unitate I. În acest fel în locul matricei B va apare matricea X.

Pasul 1. Se consideră $a_{11} \neq 0$. Dacă $a_{11} = 0$, se face o schimbare de linii astfel încât în prima linie să avem $a_{i1} \neq 0, i = \overline{2,n}$. Elementul a_{11} se numeşte **pivot**.

Elementele $a_{ij}^{(1)}$ şi $b_i^{(1)}$ situate pe linia $i, i = \overline{2,n}$, se obțin scăzând din linia i elementele din prima linie, înmulțite cu $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, $i = \overline{2,n}$.

Astfel rezultă

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}}{a_{11}}, \quad i = \overline{2,n}, j = \overline{1,n}$$

şi

$$b_i^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{i1} & b_i \end{vmatrix}}{a_{11}}, \qquad i = \overline{2,n}.$$

Astfel, după primul pas avem :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Pasul 2. Cu matricea obținută după pasul 1 se procedează la fel, suprimând prima coloană şi considerând pe $a_{22}^{(1)} \neq 0$ ca pivot. În caz că $a_{22}^{(1)} = 0$, se procedează ca în pasul 1.

După n – 1 paşi, se obține :

$$(I|X) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1^{(n-1)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n^{(n-1)} \end{array}\right)$$

din care rezultă soluțiile

$$x_i = b_i^{(n-1)}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Observație. Această metodă ne furnizează în mod simplu inversa unei matrici alături de soluția sistemului.

Exemplu.. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$.

Soluție. Vom alcătui un tabel de forma :

Scanned with OKEN Scanner

A			I			B
(1)	4	3	1	0	0	1
2	5	4	0	1	0	4
1	-3	-2	0	0	1	5
1	4	3	1	0	0	1
0	(-3)	-2	-2	1	0	2
0	-7	-5	-1	0	1	4
1	0	1/3	-5/3	4/3	0	11/3
0	1	2/3	2/3	-1/3	0	-2/3
0	0	(-1/3)	11/3	-7/3	1	-2/3
1	0	0	2	-1	1	3
0	1	0	8	-5	2	-2
0	0	1	-11	7	-3	2

adică $x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = 2$.

Acelaşi lucru se mai poate scrie astfel :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -7 & -5 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1/3 & 11/3 \\ 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & -2/3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

B. Metoda eliminării parțiale.

Considerăm acelaşi sistem (s_1) având n ecuaţii liniare cu n necunoscute.

Folosind metoda eliminării parțiale, prima ecuație rămâne neschimbată, din a doua se va elimina x_1, din a treia se va elimina x_1 şi x_2, etc. Astfel, vom parcurge următorii paşi :

Scanned with OKEN Scanner

Pasul 1. Elementul $a_{11} \neq 0$ se alege pivot.

Elementele situate pe linia pivotului după primul pas vor rămâne neschimbate.

Elementele situate pe linia i se obțin înmulțind linia i cu a_{11} din care se scade prima linie înmulțită cu a_{i1}.

$$a_{ij}^{(1)} = a_{11}a_{ij} - a_{i1}a_{1j}, \qquad b_i^{(1)} = a_{11}b_i - a_{i1}b_1, \qquad i = \overline{2,n},\ j = \overline{1,n}.$$

Astfel putem scrie

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right).$$

Pasul 2. Se va elimina linia şi coloana pivotului din matricea obținută după primul pas şi se va considera $a_{22}^{(1)} \neq 0$ drept pivot. După $(n-1)$ paşi se va obține matricea :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right)$$

din care va rezulta soluția :

$$x_n^0 = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \dots, \quad x_1^0 = \frac{b_1 - a_{1n}x_n^0 - \dots - a_{12}x_2^0}{a_{11}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 7x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - 2x_5 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 20 \\ 2x_2 - 5x_3 + x_5 = 23 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 = -14 \end{cases}.$$

Soluție.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -7 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & 1 & 23 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -14 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 4 & 12 & 1 \\ -2 & -3 & 5 & 21 & 20 \\ 2 & -5 & 0 & 1 & 23 \\ -2 & -1 & 5 & 7 & -14 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -18 & -38 \\ 12 & -8 & -26 & -48 \\ 0 & -2 & 10 & 30 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 28 & 66 \\ -2 & 10 & 30 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 14 & 33 \\ -1 & 5 & 15 \end{array}\right) \Rightarrow (9|18)$$

$x_5 = 18 : 9 = 2;$
$x_4 = (33 - 14 \cdot 2) : (-1) = -5;$
$x_3 = (-19 + 9 \cdot 2 - 5) : 2 = -3;$
$x_2 = (1 - 12 \cdot 2 + 4 \cdot 5 - 3) : (-2) = 3;$
$x_1 = 7 \cdot 2 + 2 \cdot (-5 + 3 - 3) = 4.$

Scanned with OKEN Scanner

2. SPAȚII VECTORIALE. SPAȚII ECONOMICE ORGANIZATE CA SPAȚII VECTORIALE

2.1. LEGI DE COMPOZIȚIE

2.1.1. Definiție, exemple, tipuri particulare de legi de compoziție internă.

Definiția 2.1.1.1. *Se numeşte* ***lege de compoziție*** *sau* ***operație internă*** *pe mulțimea M o aplicație a mulțimii* $M \times M$ *în M.*

Cu alte cuvinte, o lege de compoziție internă pe mulțimea M este o corespondență care asociază fiecărei perechi ordonate (x,y) de elemente din M un element z unic determinat din M, numit **compusul** lui x cu y.

Pentru o lege de compoziție se folosesc diverse notații, ca:

$$z = x + y,\ z = x \cdot y,\ z = x * y,\ z = x \wedge y \text{ etc.}$$

Dacă legea de compoziție este notată cu "+", se numeşte **adunare**. Elementele x şi y se numesc în acest caz **termeni,** iar compusul lor z se numeşte **sumă.**

Dacă legea de compoziție este notată cu".", se numeşte **înmulțire**. În acest caz, x şi y se numesc **factori,** iar z, compusul lor, se numeşte **produs.**

O aplicație a unei submulțimi proprii a lui $M \times M \to M$ se numeşte **lege de compoziție internă parțială** pe M. În cele ce urmează, când nu vom face precizare, vom înțelege că avem o lege de compoziție peste tot definită.

Scanned with OKEN Scanner

Legile de compoziţie interne, definite mai sus, se numesc binare; spre deosebire de legile de compoziţie interne n-are pe M care sunt aplicaţii ale mulţimii $M \times M \times ... \times M$, de n ori, în M.

Exemple de legi de compoziţie internă:

1. Adunarea în mulţimea R a numerelor reale.
2. Scăderea în mulţimea N a numerelor naturale.

În mulţimea $P(M)$ a părţilor unei mulţimi M definim următoarele operaţii:

3. Operaţia de reuniune, care asociază fiecărei perechi ordonate (A,B) de submulţimi ale lui M, submulţimea notată cu $A \cup B$ şi formată din elementele care se găsesc fie în A fie în B:

$$A \cup B = \{x \in M / x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

4. Operaţia de intersecţie, care asociază fiecărei perechi ordonate de submulţimi A, B din M, submulţimea lui M notată cu $A \cap B$ şi formată din elementele care se găsesc şi în A şi în B:

$$A \cap B = \{x \in M / x \in A \text{ şi } x \in B\}.$$

5. Operaţia de scădere, care asociază fiecărei perechi ordonate de submulţimi A, B din M, submulţimea lui M notată $A \setminus B$ şi formată din elementele care se găsesc în A şi nu se găsesc în B

$$A \setminus B = \{x \in M / x \in A \text{ şi } x \notin B\}.$$

Dacă $A=M$, atunci mulţimea $M \setminus B$ se notează cu B' şi se numeşte **complementara** mulţimii B în M. Avem evident

$$A \setminus B = A \cap B'.$$

6. Operaţia de complementariere, care este restricţia operaţiei de scădere la submulţimile lui $P(M) \times P(M)$ formată din perechile ordonate (A,B) cu $B \subset A$. În acest caz, mulţimea $A \setminus B$ se numeşte **complementara lui B în raport cu A** şi se notează cu $C_A B$.

În fiecare caz din figura III.1., porţiunea haşurată reprezintă mulţimea indicată sub figură.

Scanned with OKEN Scanner

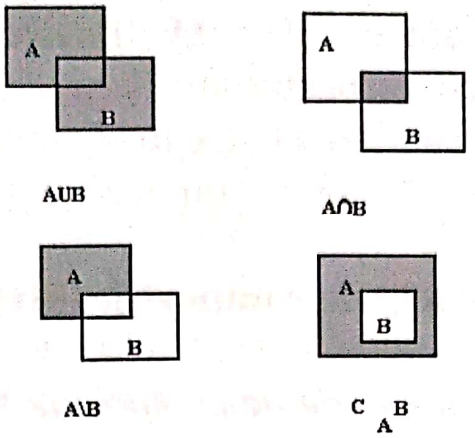


Figura III.1

7. Dacă M este o mulțime nevidă, notăm cu F ansamblul tuturor aplicațiilor $f: A \to B$ cu $A, B \subset M$. În mulțimea F se definește o lege de compunere (înmulțire) a aplicațiilor, care asociază fiecărei perechi ordonate de aplicații $f: A \to B, g: B \to C$ aplicația $h: A \to C$ unic determinată prin condiția

$$\forall x \in A: h(x) = g(f(x))$$

Vom folosi notația $h = g \circ f$. Are loc:

Teorema 2.1.1.1. *Produsul a două surjecții, injecții sau bijecții este respectiv o surjecție, injecție sau bijecție.*

Legile de compoziție din exemplele 2, 5 şi 7 sunt legi de compoziție parțiale pe când celelalte sunt definite peste tot pe mulțimile respective.

Definiția 2.1.1.2. *O submulțime A a unei mulțimi M se numeşte* ***stabilă (închisă)*** *față de o lege de compoziție definită pe M, dacă oricare ar fi două elemente x şi y din A, compusul lor prin legea dată se găseşte tot în A.*

Se obține astfel o lege peste tot definită pe *A,* numită **lege de compoziție indusă de legea dată pe *M*.** De exemplu, submulțimea N a numerelor naturale este închisă față de operația de adunare în mulțimea Z a numerelor întregi, dar nu este închisă față de operația de scădere în Z. Mulțimea Z a numerelor întregi este închisă față de operația de înmulțire în mulțimea Q a

Scanned with OKEN Scanner

numerelor raționale, dar mulțimea $Z^* = Z\setminus\{0\}$ nu este închisă față de operația de împărțire în $Q^* = Q\setminus\{0\}$. Deci adunarea în Z și înmulțirea în Q induc respectiv în N și Z legi de compoziție definite peste tot pe când scăderea în Z și împărțirea în Q^* nu induc în N și respectiv Z^* legi de compoziție peste tot definite.

Tipuri particulare de legi de compoziție interne

Definiția 2.1.1.3. *O lege de compoziție "$\circ$" în mulțimea M se numește* ***asociativă*** *dacă* $\forall x, y, z \in M : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

Dacă legea de compoziție este parțială, ea este asociativă când odată cu compusul din membrul întâi există și cel din membrul al doilea și sunt egali.

Pentru exemplele considerate în secțiunea precedentă avem următoarele rezultate:

- Operația de adunare în R este asociativă deoarece oricare ar fi $x, y, z \in R$ avem $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- Operația de scădere în R nu este asociativă, deoarece
$$(x - y) - z \neq x - (y - z)$$
dacă $z \neq 0$.
- Operațiile de reuniune și intersecție în $P(M)$ sunt asociative. În adevăr, oricare ar fi $A, B, C \in P(M)$ avem $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ deoarece mulțimile din ambii membri sunt formate din elementele care se găsesc sau în A sau în B sau în C.

  De asemenea
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
deoarece ambii membri reprezintă mulțimea elementelor comune mulțimilor A, B, C.
- Operația de scădere a mulțimilor nu este asociativă . În general,
$$(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C).$$

Scanned with OKEN Scanner

- Legea de compunere a aplicațiilor este o lege parțială asociativă. În adevăr, fie $A,B,C,D \subset M$ şi fie $f:A\to B$, $g:B\to C$, $h:C\to D$. Atunci pentru orice $x\in M$ avem

$$[(h\circ g)\circ f](x)=(h\circ g)f(x)=h(g[f(x)])$$

$$[h\circ(g\circ f)](x)=h[(g\circ f)(x)]=h(g[f(x)])$$

$$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$$

Definiția 2.1.1.4. *O lege de compoziție "$\circ$" în mulțimea M se numeşte* ***comutativă,*** *dacă* $\forall x,y\in M: x\circ y=y\circ x$.

Dacă legea de compoziție este parțială, ea este comutativă când odată cu $x\circ y$ există şi $y\circ x$ şi sunt egale.

Din exemplele considerate în secțiunea precedentă numai legile 1, 3 şi 4 sunt comutative.

2.1.2. Element regulat, element neutru, element simetric

2.1.2.1.Element regulat

Definiția 2.1.2.1.1. *Se spune că un element $a\in M$ este* ***regulat*** *față de legea de compoziție "$*$" dacă*

$$\forall x,y\in M:\begin{cases}a\circ x=a\circ y\Rightarrow x=y\\ x\circ a=y\circ a\Rightarrow x=y\end{cases}.$$

Dacă este îndeplinită numai prima condiție , elementul a se zice **regulat la stânga,** iar dacă este îndeplinită numai a doua condiție se zice **regulat la dreapta**.

Dacă orice element din M este regulat față de operația "$\circ$" se spune că în M este valabilă **regula de simplificare** pentru această operație. Din acest motiv, un element $a\in M$ regulat se mai numeşte **simplificabil.**

Scanned with OKEN Scanner

Exemple

1. În mulțimea numerelor reale orice element este regulat față de adunare şi orice element diferit de zero este regulat față de înmulțire. În adevăr:

$$a+x=a+y \Rightarrow x=y; a\neq 0, ax=ay \Rightarrow x=y.$$

2. În $P(M)$ nici un element afară de $\emptyset$ nu este regulat față de reuniune şi nici un element afară de M nu-i regulat față de intersecție.

2.1.1.2. Element neutru

Definiția 2.1.2.2.1. *Se spune că un element e al unei mulțimi M este* ***neutru*** *pentru legea de compoziție "∘", dacă*

$$x\circ e=e\circ x=x \qquad (2.1)$$

oricare ar fi elementul x din M.

Teorema 2.1.2.2.1. *Dacă o lege de compoziție admite element neutru, acesta este unic.*

Demonstrație. Să presupunem că pe lângă elementul neutru e ar mai exista un element neutru $\bar{e}$. Cum e este neutru, luând în relația $x\circ e=x$ pe $x=\bar{e}$ obținem $\bar{e}\circ e=\bar{e}$. Cum şi $\bar{e}$ este neutru, considerând în relația $\bar{e}\circ x=x$ pe $x=e$, găsim $\bar{e}\circ e=e$. Comparând, rezultă că $\bar{e}=e$, adică elementul neutru este unic.

Dacă operația este notată aditiv, elementul neutru se numeşte **element nul** şi se notează, de obicei, cu *0*.

Dacă operația este notată multiplicativ, elementul neutru se numeşte **element unitate** şi se notează de obicei cu *1*.

Exemple

1. În mulțimea numerelor reale, adunarea are ca element nul pe *0*, iar înmulțirea are ca element unitate pe *1*, deoarece oricare ar fi $x\in R$ avem:

$$x+0=0+x=x \text{ şi } x\cdot 1=1\cdot x=x.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. În $P(M)$ reuniunea are ca element neutru pe $\emptyset$, iar intersecția pe M, deoarece oricare ar fi $X \in P(M)$ avem

$$X \cup \emptyset = \emptyset \cup X = X \text{ şi } X \cap M = M \cap X = X.$$

3. În mulțimea numerelor naturale pare, operația de înmulțire nu are element neutru.

2.1.2.3. Element simetric

Definiția 2.1.2.3.1. *Se spune că elementul $a' \in M$ este* ***element simetric*** *pentru elementul $a \in M$ față de o lege de compoziție "$\circ$" definită pe mulțimea M şi care are element neutru e dacă:*

$$a \circ a' = a' \circ a = e \qquad (2.2)$$

Teorema 2.1.2.3.1. *Dacă a' este element simetric pentru a, atunci şi a este element simetric pentru a'.*

Demonstrație. Dacă a' este simetric pentru a, avem relația (2.2). Cum ea se mai poate scrie sub forma

$$a' \circ a = a \circ a' = e,$$

rezultă că şi a este simetric pentru a'.

Teorema 2.1.2.3.2. *Dacă legea de compoziție "$\circ$" este asociativă, iar a' şi b' sunt elemente simetrice, respectiv pentru a şi b, atunci $b' \circ a'$ este element simetric pentru $a \circ b$.*

Demonstrație. Din relația (2.2) şi corespunzătoarea ei pentru b, obținem:

$$(a \circ b) \circ (b' \circ a') = a \circ (b \circ b') \circ a' = a \circ a' = e$$
$$(b' \circ a') \circ (a \circ b) = b' \circ (a' \circ a) \circ b = b' \circ b = e$$

ceea ce demonstrează afirmația teoremei.

Teorema 2.1.2.3.3. *Dacă o lege de compoziție "$\circ$" pe M este asociativă, atunci orice element are cel mult un simetric.*

Demonstrație. Dacă un element a ar avea două elemente simetrice a' şi a'', atunci

$$a'' = a'' \circ e = a'' \circ (a \circ a') = (a'' \circ a) \circ a' = e \circ a' = a'$$

Scanned with OKEN Scanner

De obicei, dacă operaţia este notată aditiv, elementul simetric unui element a se numeşte **opusul** lui a şi se notează cu "$-a$". Dacă operaţia este notată multiplicativ, simetricul lui a se numeşte **inversul** lui a şi se notează cu a^{-1}.

Exemple

1. În mulţimea numerelor naturale nici un element diferit de 0 nu are opus faţă de adunare şi nici un element diferit de 1 nu are un invers faţă de înmulţire.
2. În mulţimea numerelor întregi orice element are opus faţă de adunare şi nici un element diferit de ± 1 nu are invers faţă de înmulţire.
3. În mulţimea numerelor raţionale orice număr are opus faţă de adunare şi orice număr diferit de 0 are invers faţă de înmulţire.
4. În mulţimea $P(M)$ nici un element afară de $\emptyset$ nu are simetric faţă de reuniune şi nici un element afară de M nu are simetric faţă de intersecţie.În adevăr, pentru orice $A \in P(M)$ avem $A \cup X = \emptyset \rightarrow A = X$ şi $A \cap Y = M \rightarrow A = Y = M$.

2.1.3. Homomorfisme

2.1.3.1. Definiţie şi proprietăţi

Definiţia 2.1.3.1.1. *Fie A şi B două mulţimi dotate respectiv cu legile de compoziţie "$\circ$" şi "$*$". O aplicaţie $h: A \to B$ se numeşte* ***homomorfism*** *pentru legile "$\circ$" şi "$*$" dacă şi numai dacă imaginea compusului a două elemente oarecare din A este egală cu compusul imaginilor corespunzătoare în B.*

$$\forall x_1, x_2 \in A : h(x_1 \circ x_2) = h(x_1) \circ h(x_2) \qquad (3.1)$$

Un homomorfism bijectiv $h: A \to B$ se numeşte **izomorfism**. Are loc:

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 2.1.3.1.1. *Dacă* $h: A \to B$ *este un izomorfism pentru operaţiile "*" şi "∘", atunci* $h^{-1}: B \to A$ *este un izomorfism pentru operaţiile "*" şi "∘".*

Demonstraţie. Fie $y_1, y_2 \in B, h^{-1}(y_1) = x_1, h^{-1}(y_2) = x_2$, adică $y_1 = h(x_1), y_2 = h(x_2)$. Rezultă $y_1 * y_2 = h(x_1 \circ x_2)$, adică $h^{-1}(y_1 * y_2) = x_1 \circ x_2$ şi deci

$$\forall y_1, y_2 \in B: h^{-1}(y_1 * y_2) = h^{-1}(y_1) \circ h^{-1}(y_2).$$

Luând în Definiţia 3.3.1.1. pe $B = A$ şi "*" = "∘" obţinem

Definiţia 2.1.3.1.2. *O aplicaţie* $h: A \to B$ *se numeşte* ***endomorfism*** *pentru o lege de compoziţie "∘" dată pe A, dacă şi numai dacă satisface condiţia*

$$\forall x_1, x_2 \in A: h(x_1 \circ x_2) = h(x_1) \circ h(x_2).$$

Un endomorfism bijectiv se numeşte **automorfism.**

2.1.3.2. Exemple

1. Aplicaţia $h: R \to R_+^* = (0, \infty)$, dată de corespondenţa $h(x) = e^x$, este un izomorfism faţă de operaţiile de adunare pe R şi înmulţire pe R_+^* deoarece este bijectivă şi

$$\forall x_1, x_2 \in R: e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}.$$

2. Aplicaţia $h: R \to R_+^* = (0, \infty)$ definită de corespondenţa $h(x) = |x|$ este un homomorfism faţă de înmulţire, deoarece este surjectivă şi

$$|x.y| = |x| \cdot |y|$$

Ea nu este însă homomorfism faţă de adunare, deoarece

$$|x + y| \le |x| + |y|.$$

3. Aplicaţia $h: R^* = R - \{0\} \to R^*$ definită de corespondenţa $h(x) = \frac{1}{x}$ este un automorfism faţă de înmulţire deoarece este bijectivă şi

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$$

Scanned with OKEN Scanner

4. Aplicația $h: P(M) \to P(M)$ definită de corespondența $h(A) = A' = M \setminus A$ adică trecerea la complementară, este un izomorfism față de operațiile de reuniune și intersecție, deoarece este bijectivă și

$$\forall A, B \in P(M): (A \cup B)' = A' \cap B'$$

Cum în acest caz $h = h^{-1}$ rezultă că h este un izomorfism și față de operațiile de intersecție și reuniune, adică

$$\forall A, B \in P(M): (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

2.2. GRUPURI ŞI CORPURI

2.2.1. Grupuri

2.2.1.1. Definiție. Exemple. Proprietăți elementare

Definiția 2.2.1.1.1. *Se spune că o lege de compoziție internă "$\circ$" peste tot definită pe mulțimea G, determină pe G o* ***structură de grup,*** *dacă este asociativă, are element neutru și orice element din G are simetric față de această lege.*

Deci , operația "$\circ$" definește pe G o structură de grup dacă și numai dacă :

1. $\forall x, y, z \in G: (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$,
2. $\exists e \in G: \forall x \in G: x \circ e = e \circ x = x$,
3. $\forall x \in G, \exists x \in G: x \circ x' = x' \circ x = e$.

Mulțimea G înzestrată cu o astfel de operație se numește **grup.** Dacă în plus legea de compoziție este și comutativă, adică

4. $\forall x, y \in G: x \circ y = y \circ x$

Scanned with OKEN Scanner

atunci ea determină pe G o structură de **grup comutativ** sau **abelian.**

Exemple

1. Operația de adunare definește pe mulțimea Z a numerelor întregi o structură de grup abelian.
2. Operația de înmulțire definește pe $Q^* = Q \setminus \{0\}$, unde Q este mulțimea numerelor raționale, o structură de grup comutativ.
3. Considerăm o mulțime nevidă M şi fie $S(M)$ ansamblul tuturor substituțiilor lui M, adică al aplicațiilor bijective ale mulțimii M pe ea însăşi. Operațiile de compunere a aplicațiilor definește pe mulțimea $S(M)$ o structură de grup, numit **grupul substituțiilor mulțimii M.**

Din definiția grupului rezultă câteva proprietăți elementare ale sale.

Teorema 2.2.1.1.1. *Într-un grup G orice element este regulat.*

Demonstrație. Fie a un element oarecare din G şi x,y elemente din G astfel ca

$$a \circ x = a \circ y$$

Din proprietatea 2, elementul a are simetric pe a', astfel că operând cu acesta la stânga obținem

$$a' \circ (a \circ x) = a' \circ (a \circ y)$$

Din proprietatea de asociativitate a operației, operând cu acesta la stânga obținem

$$(a' \circ a) \circ x = (a' \circ a) \circ y$$

şi ținând seama de proprietatea 3 rezultă

$$e \circ x = e \circ y$$

şi aplicând din nou proprietatea 2, deducem

$$x = y$$

şi deci elementul a este regulat la stânga. La fel se arată că el este regulat la dreapta.

Teorema 2.2.1.1.2. În orice grup G ecuațiile

$$a \circ x = b \text{ şi } x \circ a = b$$

Scanned with OKEN Scanner

au soluții unice.

Demonstrație. Se verifică cu uşurință că cele două ecuații au, respectiv, soluțiile:

$$x_1 = a' \circ b \text{ şi } x_2 = b \circ a'$$

unde a' este simetricul lui a.

Dacă y_1 verifică prima ecuație avem

$$a \circ y_1 = b$$

şi operând la stânga cu a' obținem

$$y_1 = a' \circ b = x,$$

deci, soluția $x_1 = a' \circ b$ este unică.

La fel se arată că şi soluția

$$x_2 = b \circ a'$$

pentru ecuația a doua este unică.

Dacă operația în G este notată aditiv, atunci soluția ecuației $x+a=b$ este $x = b + (- a)$ care se mai notează, în cazul în care operația este comutativă, cu $x = b - a$. În acest caz, operația în G, care asociază perechii ordonate (b,a) elementul $x = b - a$ se numeşte **scădere**. Elementul b se numeşte **descăzut**, a se numeşte **scăzător** iar x se numeşte **diferență.**

Dacă operația în G este notată multiplicativ, soluția ecuației $x \cdot a = b$ este $x = b \cdot a^{-1}$ care se mai notează, când înmulțirea este comutativă prin $x = \frac{b}{a}$. În cazul acesta, operația în G, care asociază fiecărei perechi ordonate (b,a) elementul $x = \frac{b}{a}$ se numeşte **împărțire**.

Elementul b se numeşte **deămpărțit** , a se numeşte **împărțitor,** iar x se numeşte **cât.**

Un grup în care operația este notată cu "+" se va numi **grup aditiv**, iar unul în care este notată cu "." se va numi **grup multiplicativ.**

Scanned with OKEN Scanner

2.2.1.2. Subgrupuri.

Definiția 2.2.1.2.1. *O submulțime G' a unui grup G se numește* ***subgrup*** *al lui G, dacă legea de compoziție dată pe G induce pe G' o structură de grup.*

Teorema 2.2.1.2.1. *Condiția necesară și suficientă ca submulțimea G' a lui G să fie un subgrup al lui G este ca*

1. $\forall x, y \in G' : x \circ y \in G'$,

2. $\forall x \in G' : x' \in G'$.

Demonstrație.

Necesitatea. Dacă G' este subgrup, atunci din definiția grupului rezultă imediat că trebuie să fie îndeplinite condițiile 1. și 2.

Suficiența. Presupunem că sunt îndeplinite condițiile 1. și 2. Atunci, deoarece compusul a oricare două elemente din G' se află în G' avem o lege de compoziție internă pe G'. Ea este asociativă, căci este asociativă în G. După condiția 2., orice element x din G' are simetric x' în G' față de această lege și dacă luăm în 1 $y = x'$ rezultă că $x \circ x' = e$ se găsește în G'. Fiind verificate axiomele grupului, rezultă că G' este un subgrup al lui G.

Exemple

1. Submulțimea $G' = \{e\}$ a unui grup G, formată numai din elementul neutru e este un subgrup al lui G.
2. Mulțimea numerelor întregi Z este subgrup al grupului numerelor raționale Q față de operația de adunare.
3. Mulțimea $Q^* = Q \setminus \{0\}$ este un subgrup al grupului $R^* = R \setminus \{0\}$ față de operația de înmulțire.

Scanned with OKEN Scanner

2.2.1.3..Homomorfisme de grupuri

Definiția 2.2.1.3.1. *Fie două grupuri G şi H cu operațiile respective "∘" şi "*". Se spune că grupul G este* ***homomorf*** *cu grupul H, dacă există o aplicație* $h: G \to H$ *care să fie homomorfism față de operațiile "∘" şi "*", adică*

$$\forall x_1, x_2 \in G : h(x_1 \circ x_2) = h(x_1) * h(x_2).$$

Grupul G se numeşte **izomorf** cu grupul H dacă există un homomorfism $h: G \to H$ care să fie bijectiv.

Exemple:

1. Aplicația $h: Z \to R^*$, unde Z este grupul aditiv al numerelor întregi, iar R* grupul multiplicativ al numerelor reale diferite de zero, dată de regula

$$\forall x \in Z : h(x) = e^x$$

este un homomorfism.

2. Aplicația $h: R_+^* \to R$ unde R_+^* este grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive, iar R grupul aditiv al numerelor reale, dată de regula

$$\forall x \in R_+^* : h(x) = \log_{10} x$$

este un izomorfism.

Teorema 2.2.1.3.1. *Imaginea elementului neutru al lui G prin homomorfismul* $h: G \to H$ *este elementul neutru al lui H.*

Demonstrație. $\forall x \in G : h(x) = h(x \circ e) = h(x) \circ h(e)$ şi deci $h(e)$ este elementul neutru al lui H.

Teorema 2.2.1.3.2. *Imaginea simetricului unui element oarecare* $x \in G$ *prin homomorfismul* $h : G \to H$ *este simetricul imaginii lui x în H.*

Demonstrație. $h(e) = h(x \circ x') = h(x) \circ h(x')$ şi cum $h(e)$ este elementul neutru din H, rezultă că $h(x')$ este simetricul lui $h(x)$, adică $[h(x)]' = h(x')$.

Teorema 2.2.1.3.3. *Imaginea unui subgrup G' al lui G prin homomorfismul* $h : G \to H$ *este un subgrup al lui H.*

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Fie $H' = h(G')$ și $y_1, y_2 \in H'$. Deci $y_1 = h(x_1)$ și $y_2 = h(x_2)$, cu $x_1, x_2 \in G'$. Atunci

$$y_1 * y_2 = h(x_1) * h(x_2) = h(x_1 \circ x_2) \text{ și } y_1' = [h(x_1)]' = h(x_1').$$

Cum $x_1 \circ x_2$ și x_1' aparțin lui G' rezultă că $y_1 * y_2$ și y_1' aparțin lui H' și deci acesta este un subgrup al lui H.

În particular, imaginea $h(G)$ a grupului G este un subgrup al lui H, care se numește **imaginea** homomorfismului h și se notează cu **Im h**. El coincide cu H, dacă și numai dacă este surjectiv.

Teorema 2.2.1.3.4. *Contraimaginea unui subgrup H' al lui H prin homomorfismul h: G → H este un subgrup al lui G.*

Demonstrație. Fie $G' = h^{-1}(H')$ și $x_1, x_2 \in G'$. Atunci $h(x_1), h(x_2)$ aparțin lui H' și cum acesta este subgrup, lui îi aparțin și elementele

$$h(x_1) * h(x_2) = h(x_1 \circ x_2) \text{ și } [h(x_1)]' = h(x_1').$$

Deci, $x_1 \circ x_2$ și x_1' aparțin lui G' și prin urmare acesta este subgrup al lui G.

În particular, dacă H' este subgrupul format numai din elementul neutru al lui H, contraimaginea sa este un subgrup al lui G. Acest subgrup se numește **nucleul** homomorfismului h și se notează prin **Ker h** unde Ker este prescurtarea cuvântului englezesc kernel care înseamnă nucleu. El este, deci, subgrupul lui G format din elementele care se reprezintă prin h pe elementul neutru al lui H. Nucleul homomorfismului h se reduce la subgrupul format de elementul neutru al lui G, dacă și numai dacă h este injectiv.

Scanned with OKEN Scanner

2.2.2. Corpuri

2.2.2.1. Legi de compoziție distributive

Definția 2.2.2.1.1. *Fie pe o mulțime M date două legi de compoziție interne "∘" și "*" peste tot definite. Se spune că legea de compoziție "∘" este* ***distributivă*** *față de legea "*" dacă*

$$\forall x, y, z \in M : \begin{cases} x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z) \\ (y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x) \end{cases}$$

Cele două condiții exprimă distributivitatea legii "∘" față de legea "*", respectiv la stânga și la dreapta. Dacă cele două legi sunt parțiale, atunci "∘" este distributivă față de "*" dacă o dată cu compusul din membrul întâi al uneia din relațiile precedente, sunt definiți și ceilalți compuși și au loc cele două egalități.

Dacă legea "∘" este comutativă, atunci distributivitatea la stânga este echivalentă cu cea la dreapta.

Exemple

1. Operația de înmulțire este distributivă față de operația de adunare în R deoarece pentru orice $x, y, z \in R$ avem

$$x(y+z) = xy + xz$$

și înmulțirea este comutativă.

2. Operația de adunare nu este distributivă față de operația de înmulțire în R deoarece, în general

$$x + (y \cdot z) \neq (x+y) \cdot (x+z).$$

3. În mulțimea *P(M)* a părților unei mulțimi *M*, operațiile de reuniune și intersecție sunt distributive una față de alta. Ținând seama că aceste operații sunt comutative, este suficient să arătăm că oricare ar fi trei submulțimi *A, B, C* ale lui *M* avem:

$$\text{a) } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

adică reuniunea este distributivă față de intersecție și

$$\text{b) } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

adică intersecția este distributivă față de reuniune.

În adevăr, avem șirul de echivalențe logice

Scanned with OKEN Scanner

$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A$ **sau** $x \in B$ **şi** $x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \cup B$ **şi** $x \in A \cup C) \Leftrightarrow$

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

De aici, în baza tranzitivităţii relaţiei de echivalenţă logică rezultă

$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

adică egalitatea a) este demonstrată. La fel se demonstrează şi egalitatea b).

2.2.2.2.2 Definiţia corpului. Proprietăţi elementare. Exemple

Definiţia 2.2.2.2.1. *Se spune că două legi de compoziţie interne definite peste tot pe mulţimea K, prima numită adunare şi a doua înmulţire determină pe K o structură de* ***corp,*** *dacă:*

I. Adunarea determină o structură de grup comutativ pe K.

II. Înmulţirea determină o structură de grup pe $K^* = K \setminus \{0\}$.

III. Înmulţirea este distributivă faţă de adunare.

Prin urmare, cele două operaţii notate cu "+" şi"." determină pe *K* o structură de corp dacă:

I. 1. $\forall x, y, z \in K : (x+y)+z = x+(y+z);$

2. $\exists 0 \in K : \forall x \in K: x + 0 = 0 + x = x;$

3. $\forall x \in K, \exists -x \in K : x+(-x)=(-x)+x=0;$

4. $\forall x, y \in K: x+y = y+x.$

II. 1. $\forall x,y,z \in K:(xy)z=x(yz);$

2. $\exists 1 \in K, \forall x \in K : x1=1x=x;$

3. $\forall x \in K^*, \exists x^{-1} \in K^*: x x^{-1} = x^{-1} x = 1$

III. $\forall x, y, z \in K : \begin{cases} x.(y+z) = xy + xz \\ (y+z).x = yx + zx \end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

Mulțimea K, dotată cu două astfel de operații, se numește **corp**. Dacă operația de înmulțire este în plus și comutativă, adică

II. 4. $\forall x,y \in K: xy = yx$

atunci cele două operații determină pe K o structură de **corp comutativ** sau **câmp.**

Definiția 2.2.2.2.2. *Dacă două operații "+" și " · " pe K satisfac numai condițiile I.1-4, II. 1. III., se spune că cele două definesc pe K o structură de* ***inel.***

Dacă în plus, înmulțirea satisface și condiția II.2., inelul se numește **cu element unitate**, iar dacă satisface condiția II.4., inelul se numește **comutativ.**

Teorema 2.2.2.1. *Într-un corp ecuațiile*

$$a + x = b \ cu \ a,b \in K$$

și

$$a \cdot x = b \ cu \ a \in K^*, \ b \in K$$

au soluții unice.

Demonstrație. Ținând seama de Torema 3.1.1.2. Capitolul III., obținem soluțiile unice $x_1 = b - a$ și $x_2 = a^{-1}.b$

Teorema 2.2.2.2.2. *Într-un corp K, pentru orice* $x \in K$ *avem*

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$$

Demonstrație. Din III.1. și I.2. rezultă

$$0 \cdot x + 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x$$

deci, în baza unicității elementului nul, avem

$$0 \cdot x = 0.$$

Teorema 2.2.2.2.3. *Într-un corp K, relația* $x \cdot y = 0$ *are loc dacă și numai dacă* $x = 0$ *sau* $y = 0$.

Demonstrație. Dacă $x \neq 0$, după II.3, el are invers x^{-1} și deci

$$y = 1.y = (x^{-1}.x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1}.0 = 0,$$

adică $y = 0$. La fel se arată că dacă $y \neq 0$ din $x \cdot y = 0$, rezultă $x = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 2.2.2.2.4. Într-un corp K pentru orice x,y∈K avem

$$x\cdot(-y)=(-x).y=-xy$$

$$(-x)\cdot(-y)=xy\,.$$

Demonstrație. Avem, după III.1. şi I.3. că

$$x\cdot y+x\cdot(-y)=x[y+(-y)]=x\cdot 0=0$$

şi deci după Teorema 2.3.3. Capitolul II, rezultă de aici

$$x\cdot(-y)=-xy$$

La fel se arată că

$(-x)\cdot y=-xy.$

Apoi, de aici obținem

$$(-x)\cdot(-y)=-[x\cdot(-y)]=-[-x\cdot y]=xy$$

Exemple

1. Mulțimile Q, R, C ale numerelor raționale, reale şi, respectiv, complexe sunt corpuri comutative (câmpuri) față de operațiile de adunare şi înmulțire obişnuite.
2. Mulțimea Z a numerelor întregi este inel comutativ cu element unitate față de operațiile de adunare şi înmulțire.
3. Mulțimea numerelor reale de forma $a+b\sqrt{2}$ cu a, b raționale este un corp comutativ față de operațiile de adunare şi înmulțire obişnuite.
4. Fie o mulțime K formată din două elemente, unul notat cu a' şi altul notat cu a". Definim adunarea şi înmulțirea, în această mulțime, după regulile date în tabelele următoare:

+	a'	a"
a'	a'	a"
a"	a"	a'

.	a'	a"
a'	a'	a'
a"	a'	a"

Se poate verifica imediat că aceste operații determină pe mulțimea *K* o structură de corp comutativ.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 2.2.2.2.3. *Spunem că un corp K este de* ***caracteristică finită*** *sau de* ***caracteristică zero,*** *după cum există sau nu un număr natural n≠0, astfel încât*

$$n \cdot 1=0,$$

unde 0 şi 1 sunt, respectiv, elementul nul şi elementul unitate al corpului K iar

$$n \cdot 1=1+1+...+1 \text{ de } n \text{ ori.}$$

În cazul unui corp de caracteristică finită, cel mai mic număr natural, diferit de zero, care satisface condiția precedentă, se numeşte **caracteristica corpului**.

Dacă un corp I are caracteristica diferită de *n*, sau un divizor al lui, vom folosi notația *n.1=n*, unde *1* este unitatea corpului *K*.

Corpurile din exemplele 1 şi 3, considerate de noi, sunt de caracteristică zero, iar cel din exemplul 4 este de caracteristică 2.

2.2.2.3. Subcorpuri. Homomorfisme de corpuri

Definiția 2.2.2.3.1. *O submulțime K' a unui corp K se numeşte* ***subcorp,*** *dacă cele două legi de compoziție date pe K induc pe K' o structură de corp.*

Exemplu

Mulțimea numerelor reale este subcorp al corpului numerelor complexe.

Definiția 2.2.2.3.2. *Se spune că corpul K este* ***homomorf*** *cu corpul L dacă există o aplicație h : K→L care să fie homomorfism pentru operațiile de adunare şi înmulțire ce definesc structura de corp pe K şi L, adică*

$$\forall x_1, x_2 \in K : h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2) \text{ şi } h(x_1 . x_2) = h(x_1).h(x_2).$$

Dacă aplicația $h : K \to L$ este un izomorfism pentru cele două operații, se spune că corpul *K* este **izomorf** cu corpul *L*.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu

Aplicaţia corpului C al numerelor complexe pe el însuşi, definită de corespondenţa $h(z)=\bar{z}$, unde $\bar{z}$ este numărul complex conjugat lui z, este un izomorfism al lui C pe el însuşi, adică un automorfism.

Într-adevăr, această aplicaţie este bijectivă şi

$$\forall z_1, z_2 \in C : \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2} .$$

2.3. SPAŢII VECTORIALE. SPAŢII ECONOMICE ORGANIZATE CA SPAŢII VECTORIALE.

2.3.1. Spaţii vectoriale peste corpuri numerice

Definiţia 2.3.1.1. *Se numeşte* ***lege de compoziţie externă*** *pe mulţimea M faţă de mulţimea K, o aplicaţie a mulţimii* $K \times M \to M$.

Mulţimea K se numeşte **domeniu de operatori**.

De exemplu, aplicaţia $f : R \times C \to C$ definită după regula

$$\forall a \in R, \forall z = x + iy \in C; f(a,z) = ax + iay$$

este o lege de compoziţie externă pe C având R drept domeniu de operatori.

Fie K un corp numeric, adică un subcorp al corpului numerelor complexe C. În general, vom considera pe K, ca fiind unul din corpurile R sau C.

Definiţia 2.3.1.2. *O mulţime nevidă V se numeşte* ***spaţiu vectorial*** *(sau* ***spaţiu liniar****) peste corpul C dacă sunt definite pe V două legi de compoziţie, una internă (notată aditiv)*

$$p : V \times V \to V, (v_1, v_2) \xrightarrow{p} \overline{v_1} + \overline{v_2}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi una externă (notată multiplicativ)

$$q: K \times V \to V, (\alpha, \bar{v}) \xrightarrow{q} \alpha\bar{v}.$$

astfel încât, în raport cu operaţia internă, V să constituie un grup abelian, adică

$(GA_1)\ \forall \bar{v_1}, \bar{v_2}, \bar{v_3} \in V : (\bar{v_1} + \bar{v_2}) + \bar{v_3} = \bar{v_1} + (\bar{v_2} + \bar{v_3}),$

$(GA_2)\ \exists \bar{0} \in V : \forall \bar{v} \in V : \bar{v} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{v} = \bar{v},$

$(GA_3)\ \forall \bar{v} \in V, \exists (-\bar{v}) \in V : \bar{v} + (-\bar{v}) = (-\bar{v}) + \bar{v} = \bar{0},$

$(GA_4)\ \forall \bar{v_1}, \bar{v_2} \in V : \bar{v_1} + \bar{v_2} = \bar{v_2} + \bar{v_1},$

iar relativ la operaţia externă să fie îndeplinite condiţiile:

$(SV_1)\ \forall \alpha \in K, \forall \bar{v_1}, \bar{v_2} \in V : \alpha(\bar{v_1} + \bar{v_2}) = \alpha\bar{v_1} + \alpha\bar{v_2},$

$(SV_2)\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K, \forall \bar{v} \in V : (\alpha_1 + \alpha_2)\bar{v} = \alpha_1\bar{v} + \alpha_2\bar{v},$

$(SV_3)\ \forall \alpha, \beta \in K, \forall \bar{v} \in V : \alpha(\beta\bar{v}) = (\alpha\beta)\bar{v} = \beta(\alpha\bar{v}),$

$(SV_4)\ \forall \bar{v} \in V$, *1 elementul unitate în K:* $1.\bar{v} = \bar{v}.$

După cum K=R sau K=C, spaţiul vectorial V se va numi **spaţiu liniar real** sau **spaţiu liniar complex**. În aceste cazuri se obişnuieşte să se spună despre V că este un **R-spaţiu**, respectiv un **C-spaţiu**. În general vom spune că V este un **K-spaţiu vectorial** (liniar).

Elementele spaţiului vectorial V sunt numite **vectori** şi vor fi notate prin litere ale alfabetului latin suprabarate (cu excepţia cazurilor când avem de-a face cu modele concrete de spaţii liniare şi notaţiile elementelor acestora sunt bine cunoscute).

Elementele corpului K sunt numite **scalari** şi vor fi notate prin litere ale alfabetului elen sau prin litere latine prevăzute cu indici.

Astfel, un spaţiu liniar este ansamblul (V,+,·,K) care satisface condiţiile (GA_i)şi (SV_i) cu $i=1,2,3,4$.Cele două operaţii utilizate la definirea structurii de K-spaţiu liniar pe mulţimea

Scanned with OKEN Scanner

suport V sunt numite respectiv **adunarea vectorilor** şi **înmulţirea cu scalari a vectorilor.**

Elementul $\bar{0}(\in V)$, definit prin axioma de grup (GA_2) este numit **vectorul nul** al spaţiului.

Elementul $(-\bar{v})$ $(\in V)$ definit de axioma (GA_3) este numit **vectorul opus** lui $\bar{v}$.

2.3.2. Consecinţe

Pe baza axiomelor (GA_i) şi (SV_i) $(i=1,2,3,4)$ demonstrăm proprietăţile 1), 2), 3) din:

Propoziţia 2.3.2.1. *În orice K-spaţiu vectorial au loc relaţiile:*

1) $0\cdot\bar{v}=\bar{0}$ $\quad(0\in K;\bar{0},\bar{v}\in V)$.

2) $\alpha\cdot\bar{0}=\bar{0}$ $\quad(\alpha\in K)$.

3) $(-1)\bar{v}=-\bar{v}$ $\quad(-1\in K)$.

Demonstraţie. 1) Calculând suma

$$0\cdot\bar{v}+\bar{v}=0\cdot\bar{v}+1\cdot\bar{v}=(0+1)\bar{v}=\bar{v}$$

în care se folosesc succesiv (SV_1) şi (SV_2) cu axioma de grup (GA_2) rezultă că vectorul $0\cdot\bar{v}$ trebuie să coincidă cu vectorul nul al spaţiului, adică să avem $0\cdot\bar{v}=\bar{0}$.

2) Utilizând (SV_3) cu proprietatea 1), stabilită mai sus, pentru $\alpha\in K$ şi $\bar{v}\in V$ arbitrari, avem succesiv $\alpha\cdot\bar{0}=\alpha(0\cdot\bar{v})=(\alpha\cdot 0)\cdot\bar{v}=0\cdot\bar{v}=\bar{0}$.

3)Calculând suma $(-1)\cdot\bar{v}+\bar{v}=(-1)\cdot\bar{v}+1\cdot\bar{v}=(-1+1)\cdot\bar{v}=0\cdot\bar{v}=\bar{0}$, în care se folosesc succesiv (SV_1), (SV_2) şi proprietatea 1), cu axioma de grup (GA_3) deducem că vectorul $(-1)\cdot\bar{v}$ trebuie să coincidă cu vectorul opus lui V, adică să avem $(-1)\bar{v}=-\bar{v}$.

Propoziţia 2.3.2.2. *În orice spaţiu liniar V peste corpul K au loc implicaţiile:*

Scanned with OKEN Scanner

1) $\lambda\bar{v}=\bar{0},\bar{v}\neq\bar{0}\rightarrow\lambda=0,$

2) $\lambda\bar{v}=\bar{0},\lambda\neq 0\rightarrow\bar{v}=\bar{0},$

3) $\lambda\bar{v}=\mu\bar{v},\bar{v}\neq\bar{0}\rightarrow\lambda=\mu,$

pentru $\bar{v}\in V,\ \lambda,\mu\in K.$

Demonstrație. 1) Dacă $\lambda\neq 0$ înmulțind vectorii egalității date cu scalarul λ^{-1} şi ținând cont de (SV_3) şi proprietatea 2), avem succesiv

$$\lambda^{-1}(\lambda\bar{v})=\lambda^{-1}\bar{0},\ \ (\lambda^{-1}\lambda)\bar{v}=\bar{0},1\cdot\bar{v}=\bar{0}$$

adică cu (SV_4), $\bar{v}=\bar{0}$ contrar ipotezei. rezultă $\lambda=0$.

2) Se stabileşte analog.

3) Egalitatea dată este echivalentă cu $\lambda\bar{v}-\mu\bar{v}=0$ obținută prin adunarea în ambii membri a vectorului opus lui $\mu\bar{v}$ care este

$$-(\mu\bar{v})=(-1)\mu\bar{v}=(-1\mu)\bar{v}=(-\mu)\bar{v}.$$

S-au folosit în ordine (GA_3), 3) şi (SV_3).

Astfel, cu (SV_2) avem $(\lambda-\mu)\bar{v}=\bar{0}$.

Deoarece prin ipoteză $\bar{v}\neq 0$ rezultă cu 1) că trebuie să avem $\lambda-\mu=0$.

2.3.3. Spații vectoriale peste corpuri arbitrare

Dacă K este un corp oarecare, atunci se definesc peste acesta spații vectoriale drepte şi spații vectoriale stângi.În aceste cazuri, în Definiția 1.1.2. se reformulează operația externă şi axiomele (SV_i), *(i=1,2,3,4).*

Astfel, un K-spațiu vectorial drept V are operația externă definită prin înmulțirea vectorilor cu scalari la dreapta

$$q(\alpha,\bar{v})=\bar{v}\cdot\alpha;\forall\bar{v}\in V,\alpha\in K,$$

iar axiomele (SV_i) *(i=1,2,3,4)* se modifică în sensul că devin

(SV'_1) $(\overline{v_1}+\overline{v_2})\alpha=\overline{v_1}\alpha+\overline{v_2}\alpha$

Scanned with OKEN Scanner

$(SV'_2)\ \bar{v}(\alpha_1+\alpha_2)=\bar{v}\alpha_1+\bar{v}\alpha_2$

$(SV'_3)\ \bar{v}(\alpha\beta)=(\bar{v}\alpha)\beta$

$(SV'_4)\ \bar{v}\cdot 1=\bar{v}, 1\in K.$

În mod analog se introduce structura de K-spațiu vectorial stâng pe V.

Definiția 2.3.3.1. *Un K-spațiu vectorial* ***bilateral*** *este un spațiu vectorial V peste corpul K, care este simultan stâng şi drept.*

Într-un spațiu vectorial bilateral amplificarea vectorilor cu scalari se poate face în mod egal la stânga sau la dreapta.

Propoziția 2.3.3.1. *K-spațiul vectorial V este bilateral numai dacă corpul K este comutativ.*

Demonstrație. Fie V un spațiu vectorial bilateral peste corpul K. în acest caz avem $\alpha\bar{v}=\bar{v}\alpha$ cu $\alpha\in K$ şi pentru orice $\bar{v}\in V$. Din egalitatea precedentă obținem şi

$$\beta(\alpha\bar{v})=(\bar{v}\alpha)\beta, \qquad \beta\in K$$

iar cu (SV_3) şi (SV'_3)

$$(\beta\alpha)\bar{v}=\bar{v}(\alpha\beta)$$

şi deoarece V este bilateral, acesta se mai scrie

$$(\beta\alpha)\bar{v}=(\alpha\beta)\bar{v}.$$

Ținând seama de implicația 3) din Propoziția 2.2.2. rezultă că $\beta\alpha=\alpha\beta$ ceea ce reprezintă condiția ca să avem corpul K comutativ.Rezultă că, atunci când K este un corp necomutativ, se poate vorbi doar de K-spații vectoriale stângi sau drepte.

Un exemplu de corp necomutativ este **corpul K al cuaternionilor (corpul lui Hamilton).** Acesta are elemente de forma

$$q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$$

unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$, iar i, j, k, numite **unități imaginare** satisfac relațiile

$$i^2=j^2=k^2=-1$$

$i\cdot j=k=-j\cdot i, j\cdot k=i=-kj, k\cdot i=j=-i\cdot k.$

Scanned with OKEN Scanner

Cele două operații din corp se definesc în mod obișnuit, după regulile cunoscute pentru adunarea și înmulțirea numerelor complexe.

Astfel, având dați doi cuaternioni

$$q_1 = \alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k$$
$$q_{21} = \alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k$$

suma lor se definește prin relația

$$q_1 + q_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2)i + (\gamma_1 + \gamma_2)j + (\delta_1 + \delta_2)k$$

iar produsul este dat de cuaternionul

$$\begin{aligned} q_1 q_2 = {} & (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2 - \delta_1\delta_2) + \\ & + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1)i + \\ & + (\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1 - \beta_1\delta_2 + \beta_2\delta_1)j + \\ & + (\alpha_1\delta_2 + \alpha_2\delta_1 + \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)k, \end{aligned}$$

obținut prin calcul direct, ținând seama de produsele unităților imaginare date mai sus.

Elementul nul al corpului este cuaternionul

$$0=0+0\cdot i+0\cdot j+0\cdot k$$

iar simetricul lui q relativ la operația de adunare este cuaternionul

$$-q=-\alpha-\beta i-\gamma j-\delta k.$$

Înmulțirea este asociativă și admite element neutru dat de cuaternionul

$$1=1+0\cdot i+0\cdot j+0\cdot k$$

Fiecare cuaternion $q\neq 0$ admite un invers q^{-1} care se obține rezolvând sistemul liniar de 4 ecuații din $q.q^{-1}=1$ prin identificarea coeficienților lui *1, i, j, k* în cei doi membri ai egalității.

Corpul H asfel obținut nu este comutativ deoarece produsul cuternionilor nu are această proprietate.

2.3.4. Exemple de spații vectoriale

În cadrul acestui paragraf vom enumera unele dintre cele mai utilizate exemple de spații liniare întâlnite în lucrările pentru

Scanned with OKEN Scanner

care această noţiune este fundamentală. Facem precizarea că numărul de exemple de spaţii liniare poate fi nelimitat şi că, în general, această noţiune stă la baza algebrei liniare.

Considerând că exemplele de spaţii liniare prezentate în detaliu la punctele 1) şi 2) joacă un rol esenţial pentru nevoile prezentei lucrări, celelalte exemple au fost ordonate natural în raport cu mijloacele necesare pentru a le defini, iar selectarea s-a făcut în raport cu frecvenţa întâlnirilor în alte domenii.

2.3.4.1. Spaţiul aritmetic real R^n. Spaţiul aritmetic complex C^n

Elementele lui $R^n (= \underbrace{R \times R \times ... \times R}_{n})$ sunt n-upluri de numere reale $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$ adică $x^k \in R$, $k=1,2,...,n$.

Suma a două elemente $x, y \in R^n$ se defineşte după regula:

$x + y = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, ..., x^n + y^n)$.

Înmulţirea cu numărul $\alpha \in R$ a elementului $x \in R^n$ este definită prin:

$$\alpha x = (\alpha x^1, \alpha x^2, ..., \alpha x^n).$$

Elementul nutru al grupului abelian $(R^n, +)$ este n-uplul 0 = (0,0,...,0).

Elementul simetric (opus) lui $x \in R^n$ este:

$$-x = (-x^1, -x^2, ..., -x^n).$$

Cu acestea se verifică uşor axiomele (GA_i) şi (SV_i), $(i=1,2,3,4)$, astfel încât $(R^n, +, ., R)$ este un spaţiu vectorial peste corpul R ; acest spaţiu notat simplu R^n, este denumit **spaţiul aritmetic real.** Elementele sale, n-uplurile $(x^1, x^2, ..., x^n)$ sunt numite **vectori** ai spaţiului R^n (sau, ca în Analiza Matematică, **puncte** în R^n). Se poate vorbi aici de diferenţa a doi vectori x şi y notată x-y, ca fiind vectorul x+(-y).

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog se defineşte structura de spaţiu liniar pe $C^n (= \underbrace{C \times C \times ... \times C}_{n})$, ale cărui elemente sunt n-upluri de numere complexe,

$$z = (z^1, z^2, ..., z^n), z^k = x^k + iy^k, (x^k, y^k \in R; i = \sqrt{-1}, k = 1,2,...,n).$$

Scalarii necesari operaţiei externe sunt de asemenea numere complexe de forma $\lambda=\alpha+i\beta$. Cele două operaţii specifice structurii de spaţiu liniar se definesc ca şi în cazul anterior. Se obţine astfel **spaţiul aritmetic complex** $(C^n,+,.,C)$, notat simplu C^n, iar elementele sale vor fi numite **vectori** ai spaţiului C^n (sau **puncte** în C^n).

Observaţie. În virtutea celor prezentate mai sus, se obţine exemplul mai general, de spaţiu aritmetic peste corpul numeric K pentru care R şi C sunt subcorpuri: **spaţiul aritmetic $\mathbf{K}^n$**, (**K**-spaţiul $\mathbf{K}^n$,).

Vectorii acestui spaţiu sunt n-upluri din produsul cartezian $\underbrace{K \times K \times ... \times K}_{n \text{ ori}}$ iar scalarii, numere din corpul K.

În general vom utiliza expresia de **spaţiu aritmetic** numai în acest context, adică atunci când este vorba de spaţiile liniare de tipul $(K^n,+,.,K)$
, unde K este un corp numeric. Un astfel de corp fiind comutativ, toate spaţiile aritmetice sunt bilaterale.

Evident se poate defini analog K-spaţiul K^n unde K este un corp arbitrar, căruia nu-i vom asocia atributul **aritmetic**.

În particular pentru n =1, se poate vorbi de spaţiul liniar al elementelor unui corp K peste el însuşi (K-spaţiul K). În acest caz elementele corpului sunt în acelaşi timp scalari şi vectori, iar operaţiile p şi q ale structurii de spaţiu vectorial coincid cu operaţiile structurii de corp.

Scanned with OKEN Scanner

2.3.4.2. Spațiul liniar M (m,n,K) al matricelor de tipul $m \times n$ cu elemente din corpul K

Elementele lui M *(m,n,K)* sunt matrice cu m linii şi n coloane având elementele $a_j^i (i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,n)$ din corpul K

$$A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & ... & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_1^m & a_2^m & ... & a_n^m \end{vmatrix}$$

notate simbolic

$$A = [a_j^i]_{(m,n)}, \quad (a_j^i \in K)$$

De asemenea, după caz se mai folosesc notațiile echivalente

$$A = [a_{ij}]_{(m,n)} \text{ sau } A = [a^{ij}]_{(m,n)}$$

în care primul indice indică linia, iar cel de-al douilea coloana unde se află elementul.

Fiind date matricele $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M\ (m,n,K)$ şi numărul $\alpha \in K$ se definesc operațiile $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{(m,n)}$ şi $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{(m,n)}$.

Pot fi verificate cu uşurință cele opt axiome ale structurii de spațiu liniar, având ca vector nul matricea

$$0 = [0], a_{ij} = 0, \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, \ (i = 1,2,...,m, \ \ j = 1,2,...,n)$$

şi ca vector opus lui A matricea

$$-A = [-a_{ij}], \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.3.4.3. Spațiul liniar C (respectiv H) al numerelor complexe (cuaternionilor) peste corpul real R (R-spațiul C; R-spațiul H)

Elementele lui C sunt numerele complexe $z=x+iy$ $(x,y\in R, i^2=-1)$.

Acestea pot fi considerate ca vectori pentru care suma este cea definită în corp, adică $\forall z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$ avem

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)=x+iy\in C$$

iar înmulțirea cu scalarii $\alpha\in$R este cea obișnuită

$$\alpha z=\alpha(x+iy)=\alpha x+i(\alpha y)\in C.$$

Numărul complex $0=0+i\cdot 0$ reprezintă vectorul nul $\bar{0}$, iar numărul complex $-\bar{v}=-z=(-x)+i(-y)$ este vectorul opus lui $\bar{v}=z$.

Sunt verificate, evident, cele două grupe de axiome (GA_i) şi (SV_i) $(i=1,2,3,4)$. S-a obținut asfel un spațiu vectorial V=C peste corpul K=R, adică R-spațiul C.

Pentru a introduce o structură de spațiu vectorial pe mulțimea V=H peste corpul K=R se face uz de relațiile din paragraful 5.2.1. şi se defineşte ca mai sus produsul cu scalari a cuaternionilor.

Spațiile liniare reale (C,+, ·,R) şi (H,+, ·,R) sunt deci spații aritmetice.

2.3.4.4. Spațiul liniar $K_n[x]$ al polinoamelor de grad$\le n$ cu coeficienți din corpul K(K-spațiul $K_n[x]$)

Elementele lui $K_n[x]$ sunt polinoamele de variabile x notate

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\left(=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\right)$$

în care $a_0,a_1,\ldots,a_n\in K$. Deoarece nu s-a impus condiția $a_n\neq 0$ polinoamele considerate au gradul cel mult egal cu n ($\in$N).

Scanned with OKEN Scanner

Ca mulţime, $K_n[x]$ este inclusă (strict) în inelul polinoamelor K[x]. Polinoamele P(x)$\in K_n[x]$ pot fi considerate ca vectori pentru care suma este cea obişnuită în inelul K[x]:

$$\forall P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k ,$$

avem

$$p(P,Q) = P(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k ,$$

iar înmulţirea cu scalarul $\alpha \in K$ este

$$q(\alpha P) = \alpha \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k) x^k .$$

Vectorul nul al K-spaţiului $K_n[x]$ este **polinomul identic nul**

$$\bar{0} = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n, (0 \in K)$$

iar vectorul opus lui $\bar{v} = P(x)$ este polinomul

$$-\bar{v} = -P(x) = \sum_{k=0}^{n} (-a_k) x^k .$$

Se pot verifica uşor axiomele din Defiţia 5.1.1.2. şi avem spaţiul liniar al polinoamelor reale, dacă coeficienţii sunt scalari reali $(a_k, b_k \in R)$ sau spaţiul liniar al polinoamelor complexe, dacă coeficienţii sunt numere complexe $(a_k, b_k \in C)$.

2.3.4.5. Spaţiul liniar al şirurilor cu termeni din corpul K (K-spaţiul S(K))

Elementele lui S(K) sunt şirurile $f:N^* \to K$, $(N^* = \{1,2,...n,...\})$ cu

$$f(N) = \bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n, ...), \quad a_1, a_2, ..., a_n, ... \in K$$

Suma a două şiruri $\bar{a}, \bar{b} \in S(K)$ se defineşte prin

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n, ...)$$

Scanned with OKEN Scanner

iar înmulţirea şirurilor cu scalari prin

$$\alpha\bar{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, ..., \alpha a_n, ...), (\alpha \in K)$$

În raport cu operaţia de grup a lui S(K) avem elementul nul dat de şirul $\bar{0} = (0,0,...,0)$ numit **şirul zero**, iar ca element opus lui $\bar{a} \in S(K)$ se consideră şirul $-\bar{a} = (-a_1, -a_2, ..., -a_n, ...)$ numit **şirul opus** şirului $\bar{a}$.

2.3.4.6. Spaţiul liniar al şirurilor convergente cu termeni din corpul K (K-spaţiul Sc(K))

Cu operaţiile induse din spaţiul liniar S(K), definite mai sus şi ţinând seama de teoremele cunoscute asupra limitelor şirurilor convergente, rezultă că Sc(K) este un spaţiu liniar peste corpul K.

2.3.4.7. Spaţiul liniar al funcţiilor definite pe o mulţime arbitrară D cu valori într-un spaţiu vectorial Vpeste corpul K (K-spaţiul V^D)

Elementele lui V^D sunt funcţiile vectoriale

$$f : D \to V, f(x) = \bar{v}$$

pentru care suma se defineşte prin

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \overline{v_1} + \overline{v_2} (\forall x \in D)$$

pentru $\overline{v_1} = f(x)$, $\overline{v_2} = g(x)$ iar înmulţirea cu scalari din K prin $(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha\bar{v}$, operaţiile ce apar în membrii din dreapta ai relaţiei de mai sus fiind cele uzuale în V.

Elementul nul al K-spaţiului V^D este funcţia nulă pe D, notată 0D şi definită prin relaţia 0D(x) = $\bar{0}(\in V), (\forall x \in D)$, iar elementul opus funcţiei $f \in V^D$ este $(-f) \in V^D$.

Scanned with OKEN Scanner

2.3.4.8. Spațiul liniar al funcțiilor reale de clasă C^K pe un domeniu $D \subset R^n$ (R-spațiul $C^K(D,R)$)

Elementele lui $C^K(D,R)$ sunt (pentru cazul V=R) funcții din spațiul liniar R^D considerat mai sus care admit derivate parțiale continue până la ordinul $k(\in N)$ în raport cu variabilele domeniului D.

În particular, $C^0(D,R)$ costituie spațiul liniar al funcțiilor continue de tipul menționat.

2.3.4.9. Spațiul liniar al funcțiilor reale integrabile (în sens Riemann) pe un interval $I=[a,b] \subset R$ (R-spațiul J(I,R))

Este cunoscut faptul că dacă $f_1, f_2 \in J(I,R)$, atunci

$$f_1 + f_2, \alpha f_1 \in J(I,R), \forall \alpha \in R$$

şi în particular funcția nulă pe I şi opusă $(-f_1)$ a lui f_1 sunt funcții integrabile pe I.

2.3.4.10. Spațiul vectorial al segmentelor orientate legte (R-spațiul V_0)

Elementele lui V_0 sunt segmente orientate având originea într-un punct fixat O al spațiului (fizic, geometric-punctual).

Asfel, având date segmentele orientate $\overrightarrow{OA} = \overline{v_1}$ şi $\overrightarrow{OB} = \overline{v_2}$, de origine O şi extremități A respectiv B, operațiile

$$\overline{v_1} + \overline{v_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} = \overline{v}$$

şi

$$\alpha\overline{v_1} = \alpha\overrightarrow{OA} = \overline{OA'} = \overline{v'}, (\alpha \in R)$$

sunt definite prin:

a) Suma $\overrightarrow{OC}$ a segmentelor orientate $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ este segmentul diagonală al paralelogramului $OABC$ construit pe segmentele date ;

Scanned with OKEN Scanner

b) Produsul segmentului orientat $\overrightarrow{OA}$ cu scalarul $\alpha(\alpha \in R)$ este segmentul orientat $\overrightarrow{OA}$, colinear cu segmentul dat, având mărimea $\left\|\overrightarrow{OA'}\right\| = |\alpha| \cdot \left\|\overrightarrow{OA}\right\|$ şi sensul lui $\overrightarrow{OA}$ pentru $\alpha>0$ sau opus sensului lui $\overrightarrow{OA}$, pentru $\alpha<0$; cazul $\alpha=0$ implică $\left\|\overrightarrow{OA'}\right\| = 0$ şi deci $A' \equiv O$ astfel încât $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OO} = \bar{0}$ obţinând vectorul nul al spaţiului V_0.

Se verifică uşor axiomele (GA_i) şi (SV_i) $(i=1,2,3,4)$ ale unui spaţiu vectorial.

Specificăm doar că opusul lui $\bar{v} = \overrightarrow{OA}$ va fi vectorul

$$-\bar{v} = \overrightarrow{OA'} = (-1)\overrightarrow{OA}$$

şi că

$$\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0} = \overrightarrow{OO}.$$

2.3.5. Spaţii economice

Dacă elementele unui spaţiu vectorial au conţinut economic : forţă de muncă, intrări de materii prime, etc, atunci operaţia de adunare reprezintă de fapt adunarea vectorilor.

Astfel, dacă v_1 şi v_2 sunt doi vectori ce reprezintă intrările în două perioade succesive atunci $v_1 + v_2$ va fi vectorul intrărilor pentru întreaga durată formată din cele două perioade :

Scanned with OKEN Scanner

$$v_1 = (v_1^1, v_1^2, \ldots, v_1^n)$$

$$v_2 = (v_2^1, v_2^2, \ldots, v_2^n)$$

$$v_1 + v_2 = (v_1^1 + v_2^1, v_1^2 + v_2^2, \ldots, v_1^n + v_2^n).$$

Astfel de operații se pot defini şi pe spațiul ieşirilor obținându-se o evaluare a respectivei firme.

Exemplu.

Dacă o firmă produce patru produse, obținând în primul an producția fizică $A_1 = (1000, 400, 300, 250)$ şi în al doilea an $A_2 = (800, 500, 450, 200)$, atunci producția fizică în cei doi ani este

$$A = A_1 + A_2 = (1800, 900, 750, 450).$$

2.4. Subspații vectoriale.

2.4.1. Subspații ale unui spațiu vectorial

Fie V un spațiu vectorial peste corpul K.

Definiția 2.4.1.1. *O parte U a K-spațiului liniar V se numeşte* ***subspațiu*** *ui V dacă relativ la operațiile de adunare a vectorilor din V şi de înmulțire cu scalari din K are ea însăşi structură de spațiu vectorial.*

Dacă $U(\subset V)$ este subspațiu al lui V vom nota aceasta prin $U \leq V$.

Scanned with OKEN Scanner

Propoziția 2.4.1.1. *O parte U a K-spațiului liniar V este subspațiu al lui V dacă și numai dacă sunt satisfăcute condițiile:*

$(S_1)\forall \overline{v_1}, \overline{v_2} \in U \Rightarrow \overline{v_1} + \overline{v_2} \in U$;

$(S_2)\forall \alpha \in K, \overline{v} \in U \Rightarrow \alpha v \in U$.

Demonstrație. Dacă (S_1) și (S_2) sunt îndeplinite, atunci operațiile menționate în definiția 2.3.1.1 vor fi definite pe submulțimea U a lui V. Verificarea axiomelor $(GA_i),(i=1,2,3,4)$, arată că (U,+) este grup abelian; de exemplu, pentru (GA_3), avem: $\overline{v} \in U$ și $-1 \in \alpha$ implică $(-1)\overline{v} = -\overline{v} \in U$, conform lui (S_2), iar în baza lui (S_1) obținem $\overline{v} + (-\overline{v}) = \overline{0} \in U$. Evident, s-au folosit aici implicit proprietățile 1)-3), propoziția 5.1.2.1, care funcționează pe întreg spațiul V.

Alegând vectorii $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v}$ ce apar în sistemul de axiome $(SV_i)(i=1,2,3,4)$ să fie din submulțimea $U(\subset V)$, acest sistem va fi satiafăcut în U.

Reciproc, dacă U este spațiu liniar peste corpul K relativ la cele două legi de compoziție p și q ce apar în Definiția 2.1.1.2 atunci (S_1) și (S_2) sunt evidente pe U.

Observație. Cele două condiții cerute de Propoziția 2.3.1.1. pentru ca U să fie subspațiu al spațiului liniar V sunt echivalente cu următoarea cerință :

$(S), \forall \alpha, \beta \in k : \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in U \Rightarrow \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 \in U$.

Este evident că pentru următoarele două părți alalui U sunt îndeplinite condițiile de a fi subspații:

1). U=V, numit "subspațiul total "

2). U=$\{\overline{0}\}$, numit "subspațiul nul",$(\overline{0} \in V)$;

ele sunt numite subspațiile "improprii" ale lui V.

Conform celor de mai sus rezultă că putem asocia unui subspațiu noțiunea de dimensiune și, legat de aceasta, pe cea de bază.

Astfel, dacă spațiul total V este n-dimensional și subspațiul său U are dimensiunea $\dim_K U$ = k, avem $0 \le k \le n$, extremitățile

Scanned with OKEN Scanner

intervalului (de numere întregi) fiind atinse numai în cazurile cînd U se identifică cu unul sau altul dintre subspațiile improprii ale lui V.

O bază a lui U poate fi constituită dintr-un subsistem format cu k vectori ai unei baze a spațiului V. Astfel, dacă $B=(\overline{e_1},\overline{e_2},...,\overline{e_n})$ este bază în V, atunci submulțimea

$B_U=(\overline{e_{i_1}},\overline{e_{i_2}},...,\overline{e_{i_k}})(\subset B), i_1,i_2,...,i_k=1,2,...,n$, va fi o bază a subspațiului U ($\leq$V) dacă vectorii $\overline{e_{i_1}},...,\overline{e_{i_k}}$ aparțin lui U.

Putem alege o asemenea bază a lui V astfel ca primii săi k vectori să aparțină subspațiului U, caz în care B_U va fi formată cu primii k vectori ai bazei B.

Propoziția 2.4.1.2. *Înfăşurătoarea liniară a unui sistem de vectori aparținînd unui spațiu vectorial este subspațiu al spațiului considerat.*

Demonstrație. Fie $S=\{\overline{v_i}\}(\subset V)$ un sistem arbitrar de vectori ai K-spațiului V şi U = <S> înfăşurătoarea sa liniară. Cum orice vector $\overline{v}\in U$ este o combinație liniară peste corpul K de vectori din S, adică $\overline{v}=\sum_i \alpha_i \overline{v_i}$, rezultă că U ≤ V.

În plus, oricare ar fi $\alpha\in$K şi $\overline{v'}=\sum_i \lambda_i \overline{v_i}, \overline{v''}=\sum_i \mu_i \overline{v_i}\in U$, vectorii $\alpha\overline{v}$ şi $\overline{v'}+\overline{v''}$ aparțin, de asemenea, lui U, cum se poate verifica uşor.

Astfel, condițiile (S_1) şi (S_2), care atestă că U este subspațiul, sunt verificate.

În consecință, putem afirma că subsistem B_U de vectori ai unei baze B a spațiului liniar V este sistem de generatori pentru un subspațiu U a lui V, prin relația $<B_U>=U$.

Termenul de **"sistem complet"** de vectori într-un spațiu vectorial V îl păstrăm numai pentru acele sisteme de vectori $B(\subset V)$ care sunt sisteme de generatori pentru spațiul total (de

Scanned with OKEN Scanner

referință); subsistemele de vectori ale unui sistem complet pot fi privite ca sisteme de generatori ela unor subspații ale spațiului de referință.

Exemple.

1°. $U = \{(x^1,...,x^k,0,...,0) \in K^n \mid x^{k+1} = ... = x^n = 0\}$ este un subspațiu de dimensiune k al K-spațiului K^n.

2°. Fie V=M(n;K)-spațiul liniar al matricelor pătratice de ordinul n cu elemente din corpul K. Următoarele submulțimi de matrice pot fi structurate ca spații liniare peste K având operațiile induse din V:

$$M^s(n,K) = \{A = [a_{ij}]_{n\times n} \mid a_{ij} = a_{ji}\},$$

$$M^a(n,K) = \{A = [a_{ij}]_{n\times n} \mid a_{ij} = -a_{ji}\},$$

$$M^d(n;K) = \{A = [a_{ij}]_{n\times n} \mid a_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}\},$$

devenind, respectiv, subspațiul matricelor simetrice , antisimetrice, diagonale în spațiul matricelor pătratice de ordinul n.

3°. $K_m[x]$ este subspațiul polinoamelor de grad ≤ m al spațiului liniar $K_n[x]$ al polinoamelor de grad ≤ n, cu m≤ n.

Acest subspațiu conține polinoamele P(x)∈ $K_n[x]$ pentru care $a_{m+1} = ... = a_n = 0$.

4°. $S_c(K)$ este subspațiul şirurilor convergente din K -spatiul S(K) al tuturor şirurilor cu termeni din corpul K.

2.4.2. Operații cu subspații

Definitia 3.4.2.1. *Se numeşte suma a două subspații* U_1 *şi* U_2 *ale K-spațiului V mulțimea*

$$U_1 + U_2 = \{\bar{v} \in V \mid \exists \overline{v_1} \in U_1, \exists \overline{v_2} \in U_2 : \bar{v} = \overline{v_1} + \overline{v_2}\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Propozitia 2.4.2.1. *Suma a doua subspaţii ale lui V este un subspaţiu al lui V.*

Demonstratie. Fie $\bar{v}, \bar{v} \in U_1+U_2$ şi $\alpha,\beta \in K$. Atunci, putem scrie $\bar{v}=\bar{v_1}+\bar{v_2}, \bar{v'}=\bar{v_1'}+\bar{v_2'}$, cu $\bar{v_1}$, $\bar{v_1'} \in U_1$ şi $\bar{v_2}$, $\bar{v_2'} \in U_2$. Combinaţia liniară $\alpha\bar{v}+\beta\bar{v'}=(\alpha\bar{v_1}+\beta\bar{v_1'})+(\alpha\bar{v_2}+\beta\bar{v_2'})$ va aparţine sumei U_1+U_2, căci U_1,U_2 fiind subspaţii în V, conţin, respectiv, vectorii $\alpha\bar{v_1}+\beta\bar{v_1'}, \alpha\bar{v}+\beta\bar{v_2'}$.

Se observă că sumă a două subspaţii se poate obţine că înfăşurătoarea liniară a reuniunii acestor subspaţii, adică $U_1+U_2=<U_1 \cup U_2>$, deoarece orice vector $\bar{v}$ al sumei poate fi scris ca o combinaţie liniară peste corpul K ale vectorilor celor două subspaţii date.

Definitia 2.4.2.2. *Două subspaţii $U_1U_2(<=V)$ se zic independente dacă intersecţia lor este subspaţiul nul, adică*

$$U_1 \cap U_2 = \{\bar{0}\}.$$

Observăm că oricare ar fi o familie de subspaţii ale unui K - spatiu V, acestea au intersecţie nevidă, toate conţinând vectorul $\bar{0}(\in V)$, conform Propozitiei 2.3.1.1.

Subspaţiile independente nu mai conţin în comun şi alţi vectori, cu excepţia vectorului nul al spaţiului total.

Intersecţia a două subspaţii $U_1,U_2(<=V)$ coincide cu mulţimea $U_1 \cap U_2$, intersecţia obişnuită a mulţimilor de bază. Se verifică uşor :

Propozitia 2.4.2.2. *Intersecţia a două subspaţii ale lui V este un subspaţiu al lui V.*

Afirmaţia poate fi extinsă la o familie arbitrară de subspaţii, $\{U_2 / \alpha \in A, U_\alpha \leq V\}$.

Definitia 2.4.2.3. *Suma directă a două subspaţii U_1 şi U_2 ale K-spaţiului V este subspaţiul U_1+U_2 avînd proprietatea că orice element $\bar{v}$ al sau poate fi descompus în mod unic ca sumă a*

Scanned with OKEN Scanner

două elemente $\overline{v_1} si \overline{v_2}$ *ale celor doua subspații date; acest subspațiu se notează* $U_1 \oplus U_2$.

Avem, conform definiției,

$$U_1 \oplus U_2 = \{\overline{v} \in V / \exists unic \overline{v_1} \in U_1, \exists unic \overline{v_2} \in U_2 : \overline{v} = \overline{v_1} + \overline{v_2}\}.$$

Propozitia 2.4.2.4. *Suma a două subspații este sumă directă dacă si numai dacă cele două subspații sunt independente.*

2.5. Dependența liniară a sistemelor de vectori

2.5.1. Sistem de vectori liniar dependent. Sistem de vectori liniar independent.

Fie V un spațiu vectorial definit peste corpul K.

Definiția 2.5.1.1. *Un* ***sistem de vectori*** *în V este o parte a sa S care conține un număr finit de vectori sau este o mulțime numărabilă.*

Pentru astfel de submulțimi ale lui V nu vom folosi în continuare termenul de **sisteme.**

Astfel, un sistem de vectori poate fi notat

$$S = \{\overline{v_i}\}_n \text{ sau } S = \{\overline{v_i}\}_N,$$

înțelegând că este vorba, respectiv, de una din mulțimile

$$\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n}\} \text{ sau } \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n}, ...\}.$$

Atunci când se cere ca un sistem de vectori S să fie mulțime ordonată vom folosi notațiile

$$S = (\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n}) = (\overline{v_i})_n$$

respectiv

$$S = (\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n}, ...) = (\overline{v_i})_N.$$

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 2.5.1.2. *Un vector* $\bar{v} \in V$ *se numeşte* ***combinație liniară*** *de vectori din sistemul* $S = (\overline{v_i})_N$ *dacă poate fi scris sub forma*

$$\bar{v} = \alpha_1 \overline{v_1} + ... + \alpha_n \overline{v_n} + ..., (\alpha_i \in K, i \in N) \qquad (2.5.1.1)$$

Combinațiile liniare finite sunt combinații liniare de forma (2.5.1.1.) în care toți scalarii, cu excepția unui număr finit, sunt nuli.

Vom spune că expresia din membrul drept al relației (2.5.1.1), combinație liniară de vectori din S, îl **reprezintă** pe V.

O combinație liniară de tipul (2.5.1.1) în care toți scalarii sunt nuli, adică $\alpha_i = 0 (\in K)$, $\forall i \in N^*$, este numită **combinație trivială.**

Orice combinație trivială, reprezintă vectorul nul $\bar{0} (\in V)$; demonstrarea afirmației este imediată, conform cu Propoziția 2.5.1.1. şi axioma (GA_2). De menționat faptul că nu orice combinație liniară care reprezintă vectorul nul este trivială.

Definiția 2.5.1.3. *Sistemul finit* $S = \{\overline{v_i}\}_n (\subset V)$ *se spune că este* ***liniar dependent*** *peste corpul K dacă există scalarii* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n (\in K)$, *nu toți nuli, astfel încât combinația liniară* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{v_i}$ *să reprezinte vectorul nul al spațiului, adică să avem*

$$\alpha_1 \overline{v_1} + \alpha_2 \overline{v_2} + ... + \alpha_n \overline{v_n} = \bar{0} \qquad (2.4.1.2)$$

pentru cel puțin un $\alpha_i \neq 0, i = 1,2,...,n$

În caz cotrar, atunci când relația (2.4.1.2) are loc numai dacă toți scalarii sunt nuli, adică:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0 \qquad (2.4.1.3)$$

Vom spune că sistemul *S* este liniar independent.

O familie arbitrară $X = \{\overline{v_\alpha} \mid \alpha \in J$-familie de indici$\}$ de elemente ale lui V se spune că este **liniar dependentă** (sau **legată**) peste K, dacă există cel puțin un sistem finit $S \subset X$ cu această proprietate; în caz contrar, adică, dacă orice sistem finit de vectori

Scanned with OKEN Scanner

a lui X este liniar independent, vom spune că familia X este **liniar independentă** (sau **liberă**).

În particular, identificând $X = S = \{\overline{v_i}\}_N$ se obțin definițiile liniar dependenței şi liniar independenței sistemelor numărabile de vectori din V.

După cum sistemul S este liniar dependent sau liniar independent, vom spune despre vectorii acestuia că sunt **liniar dependenți** sau **liniar independenți**.

Propoziția 2.5.1.1. *Fie X o familie arbitrară de vectori din K-spațiul liniar V. Atunci:*
(I) Dacă X este o familie liniar dependentă, orice supra-familie a sa $Y(\supset X)$ este liniar dependentă;
(II) Dacă X este o familie liniar independentă, oice subfamilie a sa $Z(\subset X)$ este, de asemenea, liniar independentă.

Demonstrație.

(I) Conform definiției 2.4.1.3 există în X un sistem finit $S = \{\overline{v_i}\}_n$ liniar dependent. În acest caz, există în K sistemul de scalari $\{\alpha_i\}_n$ nu toți nuli, astfel încât să avem

$$\alpha_1\overline{v_1} + \alpha_2\overline{v_2} + ... + \alpha_n\overline{v_n} = \overline{0}.$$

Fie S' un sistem finit de vectori din Y care să conțină toate elementele lui S, adică $S \subset S' \subset Y$; astfel $S' = \{\overline{v_j}\}_{n+p}$ este liniar dependent, deoarece pentru sistemul de scalari

$$\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, 0, ..., 0\}_{n+p}$$

are loc relația

$$\alpha_1\overline{v_1} + \alpha_2\overline{v_2} + ... + \alpha_n\overline{v_n} + \alpha_{n+1}\overline{v_{n+1}} + ... + \alpha_{n+p}\overline{v_{n+p}} = \overline{0}$$

în care, conform celor de mai sus, nu toți scalarii sunt nuli.

Rezultă că Y este liniar dependent.

(II) Se obține din (I) presupunând, prin absurd, că $S'' \subset S$ (familie formată cu vectori din X) ar fi sistemul finit liniar dependent de vectori din Z.

Propoziția 2.5.1.2. *În orice spațiu vectorial V peste corpul numeric K au loc următoarele afirmații:*

Scanned with OKEN Scanner

(I) Sistemul $\{\bar{0}\}$ *format numai cu vectorul nul al spațiului este liniar dependent.*

(II) Orice familie $X(\subset V)$*, care conține vectorul nul al spațiului* $((X)\supset\{\bar{0}\})$ *este liniar dependentă; în particular, toate sistemele de vectori care conțin vectorul nul sunt liniar dependente.*

(III) Orice sistem $S=\{\overline{v_1}\},(\overline{v_1}\neq\bar{0})$ *costând dintr-un singur vector (nenul) este liniar independent.*

Demonstrație.

(I) Relația $\alpha\cdot\bar{0}=\bar{0},(\alpha\in K)$ nu implică neapărat $\alpha=0$, condiția (2.3.1.3) cerută pentru sistemele liniar independente, căci luând, de exemplu, $\alpha=1(\neq0)$, avem cu (SV4):

$$1\cdot\bar{0}=\bar{0}.$$

(II) Conform cu (2.4.1.1) familia X conține un sistem finit $\{\bar{0}\}$ liniar dependent şi, în baza Propoziției 2.4.1.1. este ea însăşi liniar dependentă.

(III) Deoarece $\overline{v_1}\neq\bar{0}$ relația $\alpha_1\overline{v_1}=\bar{0}$ implică $\alpha_1=0$ în baza propoziției 2.4.1.

Exemple.

1) În K-spațiul R^n sistemul de vectori $S=\{\overline{e_1^0},\overline{e_2^0},...,\overline{e_n^0}\}$ unde

$$\overline{e_1^0}=(1,0,...,0),\overline{e_2^0}=(0,1,0,...,0),...,\overline{e_n^0}=(0,0,...,1)$$

cu $1\in$K, elementul unitate al corpului, este liniar independent.

În adevăr, relația

$$\alpha_1\overline{e_1^0}+\alpha_2\overline{e_2^0}+...+\alpha_n\overline{e_n^0}=\bar{0}$$

echivalentă cu

$$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=(0,0,...,0)$$

implică $\alpha_i=0$ (i=1,2,...,n).

2) În K-spațiul $K_2[x]$ sistemele de polinoame

$$S_1=\{1,x,x^2\}\text{ şi }S_2=\{1,x,1+x\}$$

Scanned with OKEN Scanner

sunt: primul- liniar independent, iar cel de-al doilea liniar dependent.

În adevăr, pentru S_1, relația

$$a_2x^2 + a_1x + a_0^1 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = 0_V, (V = K_2[x])$$

are oc oricare ar fi x numai dacă $a_0 = a_1 = a_2 = 0, 0_V$ -fiind polinomul identic nul de gradul doi.

Analog, pentru S_2, relația $b_0(1+x) + b_1x + b_2 \cdot 1 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot 1$ are loc atunci când $b_0 + b_2 = 0, b_0 + b_1 = 0$. Aceste relații sunt satisfăcute, de exemplu, pentru sistemul de scalari nenuli {-1,1,1}.

2.5.2. Descompuneri în sisteme de vectori liniar independenți

Fie $S = \{\overline{v_i}\}_n$ un sistem liniar dependent în spațiul vectorial V peste corpul K. Atunci, conform definiției 2.5.1.3, vectorul nul se poate exprima ca o combinație netrivială de vectori ai lui S, adică, cu relația

$$\alpha_1\overline{v_1} + \alpha_2\overline{v_2} + ... + \alpha_n\overline{v_n} = \overline{0} \qquad (2.5.2.1)$$

în care există cel puțin un scalar nenul.

Cum sistemul S nu este ordonat, putem presupune că, de exemplu, $\alpha_n \neq 0$

În acest caz putem înmulți cu $-\frac{1}{\alpha_n}$ relația (2.5.2.1) şi aduna în ambii membri ai egalității vectorul $\overline{v_n}$. Mai notăm, de asemenea

$$-\frac{\alpha_i}{\alpha_n} = \lambda_i, i = 1,2,...,n-1$$

Obținem relația

$$\overline{v_n} = \alpha_1\overline{v_1} + \alpha_2\overline{v_2} + ... + \alpha_{n-1}\overline{v_{n-1}}, \ \alpha_i \in R \qquad (2.5.2.2)$$

Scanned with OKEN Scanner

numită **relația de descompunere** a vectorului $\overline{v_n}$ după ceilalți $n-1$ vectori ai siatemului S.

Evident, se putea obține o descompunere analoagă pentru oricare din vectorii $\overline{v_i} \in S$ care apare efectiv, (adică, este amplificat cu un scalar nenul), în reprezentarea de mai sus a vectorului nul.

Observație. Condiția de liniar dependență a sistemului de vectori în care se realizează o descompunere este esențială. Nu putem descompune un vector aparținând unui sistem liniar independent după ceilalți vectori ai sistemului, deoarece în acest caz, conform cu definiția 5.4.1.3 şi cu relația (5.4.1.3), vectorul nul al spațiului este reprezentat doar cu ajutorul combinației triviale a vectorilor sistemului, ceea ce face imposibilă aplicarea procedeului de obținere a relației de descompunere (5.4.2.2).

Propoziția 2.5.2.1. (Teorema de unicitate a descompunerii) *Fie V un K-spațiu liniar şi S un sistem de vectori liniar independent din V. Descompunerea unui vector din V după vectorii sistemului S este unică.*

Demonstrație. Fie $\bar{v} \in V$ şi $S = \{\overline{v_i}\}_m (\subset V)$ un sistem liniar independent. Presupunem că sistemul $\{\bar{v}\} \cup S = S'$ este liniar dependent şi că $\bar{v}$ ar admite două descompuneri după vectorii sistemului S al lui S'. Atunci, am avea, simultan

$$\bar{v} = \lambda_1 \overline{v_1} + ... + \lambda_m \overline{v_m}, \lambda_i \in K \qquad (2.4.2.2')$$

şi

$$\bar{v} = \mu_1 \overline{v_1} + ... + \mu_m \overline{v_m}, \mu_i \in K \qquad (2.4.2.2'')$$

Deoarece ambele descompuneri reprezintă acelaşi vector, $\bar{v}$, se obține egalitatea

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overline{v_i} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \overline{v_i},$$

care conduce la relația

Scanned with OKEN Scanner

$$\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i - \mu_i)\overline{v_i} = \overline{0}, \qquad (2.4.2.3)$$

obținută ca urmare a aplicării succesive a axiomelor (GA4), (GA1), (SV2), (GA2) și propoziției 2.4.2.1 după ce în ambii membri ai egalității precedente s-au adunat vectorii $(-\mu_i \overline{v_i}), (i = 1,2,...,m)$

În membrul stâng al relației (2.4.2.3) avem o combinație liniară a vectorilor lui S care reprezintă vectorul nul, dar cum S este liniar independent, aceasta este combinația trivială.

Rezultă deci că $\lambda_i - \mu_i = 0, \forall i = 1,2,...,m$, ceea ce implică $\lambda_i = \mu_i$ și faptul că (2.4.2.2') și (2.4.2.2") nu pot fi diferite.

2.5.3. Acoperirea liniară a unui sistem de vectori

Fie $S = \{\overline{v_i}\}$ un sistem arbitrar (finit sau nu) de vectori ai spațiului vectorial V peste corpul K.

Definiția 2.5.3.1. *Se numește* ***acoperire liniară*** *a sistemului de vectori S, mulțimea* $\langle S \rangle$ *a tuturor vectorilor spațiului V care pot fi reprezentați prin combinații liniare peste corpul K ale vectorilor sistemului dat.*

Avem deci

$$\langle S \rangle = \{\overline{v} \in V \mid \overline{v} = \sum_i \lambda_i \overline{v_i}, \lambda_i \in K\} \qquad (2.4.3.1)$$

și menționăm că vectorii lui $\langle S \rangle$, care nu sunt în număr finit se obțin schimbând în toate modurile posibile scalarii λ_i în combinațiile liniare din (5.4.3.1).

Sistemul $S = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, ...\}$ de vectori cu care se fac combinațiile (2.4.3.1) pentru a obține elementele acoperirii liniare $\langle S \rangle$ este

Scanned with OKEN Scanner

numit **sistem de generatori**, iar sistemul $\{\lambda_1,\lambda_2,...\}$ de scalari din aceste combinații este numit **sistem de operatori.**

De asemenea, putem extinde aceste noțiuni la o familie arbitrară de vectori $X=\{\overline{v_i} \mid i\in J\}(\subset V)$.

Pentru acoperirea liniară a mulțimii X, căreia i se mai spune și **înfășurătoare liniară**, putem folosi și notația $L_i(X)$.

Propoziția 2.5.3.1. Fie V un K-spațiu liniar. Acoperirea liniară a unui sistem de vectori S a lui V este un K-spațiu liniar.

Demonstrație. Se verifică imediat că, oricare ar fi $\overline{v'}=\sum_i \lambda_i'\overline{v_i}$ și $\overline{v''}=\sum_i \lambda_i''\overline{v_i}$ două combinații liniare ale vectorilor sistemului S, vectorul $\overline{v}=\overline{v'}+\overline{v''}$ este, de asemenea, o combinație a vectorilor lui S și deci, aparține mulțimii $\langle S\rangle$ ca și vectorii $\overline{v'},\overline{v''}$. La fel, dacă $\overline{v}\in\langle S\rangle$ avem $\alpha\overline{v}\in\langle S\rangle$, pentru orice $\alpha\in K$.

În plus, vectorul $\overline{0}\in V$ este element al lui $\langle S\rangle$ deoarece poate fi obținut ca o combinație trivială a vectorilor lui S, iar pentru orice vector $\overline{v}\in\langle S\rangle$ opusul $-\overline{v}=\sum_i(-\lambda_i)\overline{v_i}$ va aparține lui $\langle S\rangle$.

Cum asociativitatea și comutativitatea sumei vectorilor are loc pentru toți vectorii lui V, aceste axiome vor fi implicit satisfăcute în submulțimea sa
$\langle S\rangle$, iar axiomele (SVi), (i = 1, 2, 3, 4) pot fi ușor verificate pentru vectorii înfășurătorii liniare.

Oricare ar fi o mulțime de vectori ai K-spațiului vectorial V avem incluziunile

$$X\subset\langle X\rangle\subset V \qquad (2.4.3.2)$$

Dacă însă, orice vector $\overline{v}\in V$ poate fi reprezentat printr-o combinație liniară a vectorilor lui X, cu ajutorul unui anumit sistem de operatori din corpul K, avem și incluziunea $V\subset\langle X\rangle$ ceea ce conduce la identificarea spațiului vectorial ambiant cu înfășurătoarea liniară $\langle X\rangle$, adică $V=\langle X\rangle$ este **generat** de X.

Scanned with OKEN Scanner

În particular, un sistem de vectori $S \subset V$, care generează spațiul V, este numit **sistem complet** de vectori în V.

În general, un sistem arbitrar de vectori $S \subset V$ nu este un sistem complet de vectori în V şi, de asemenea, nu orice spațiu vectorial V admite un sistem complet de vectori.

Spațiile vectoriale care admit sisteme complete de vectori cu un număr finit de elemente se numesc **spații de tip finit.**

Oricum, S generează (conform propoziției 5.4.3.1) un spațiu vectorial $V' = \langle S \rangle$, având proprietatea că $V' \subset V$.

Observație. Dacă sistemul de vectori $S(\subset V)$ este inclus concomitent în două spații liniare $V', V''(\subset V)$, atunci înfăşurătoarea sa liniară $\langle S \rangle$ este inclusă integral în $V' \cap V''$.

Afirmația se verifică cu uşurință.

2.6. Baza şi dimensiunea unui spațiu vectorial

2.6.1. Definirea noțiunii de bază. Dimensiunea unui spațiu liniar

Fie V un spațiu vectorial definit peste corpul K

Definiția 2.6.1.1. *Se spune că un sistem de vectori B a K-spațiului liniar V formează o* ***bază*** *(algebrică) a acestuia dacă îndeplineşte condițiile:*

(B_1) *Este liniar independent.*

(B_2) *Constituie un sistem de generatori ai spațiului V.*

Din condiția (B_2) rezultă că V este acoperirea liniară a sistemului de vectori B, adică spațiul liniar generat de acest sistem (conform Propoziției 2.3.3.1) coincide cu întregul spațiu vectorial:

$$V = \langle S \rangle$$

B fiind un sistem complet de vectori în V.

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta presupune că, pentru a fi bază, sistemul B trebuie să conţină un număr suficient de elemente liniar independente (conform condiţiei (B_1)), astfel că oricare ar fi vectorul $\bar{v} \in V$ acesta să poată fi descompus liniar, cu coeficienţi din corpul K, după vectorii lui B.

În legătură cu acest fapt avem:

Propoziţia 2.6.1.1. *Un sistem finit de vectori este o bază a unui K-spaţiu liniar dacă şi numai dacă este un sistem liniar independent maximal în sensul că orice suprasistem de vectori al său este liniar dependent în spaţiul considerat.*

Demonstraţie. În adevăr, dacă B este o bază a K-spaţiului V, iar numărul elementelor sale este n şi am presupune că acest sistem de vectori liniar independenţi nu e maximal în V atunci ar exista un suprasistem al acestuia $B' \supset B$ cu un număr $n'(>n)$ vectori liniar independenţi.

Dar cum B este o bază, conform cu (B_2) orice vector $\bar{v}' \in (B' \setminus B)(\subset V)$ admite o descompunere după vectorii sistemului B, adică o descompunere în B' ceea ce contrazice presupunerea că acest sistem este liniar independent.

Reciproc, dacă $B = \{\bar{v}_1, ..., \bar{v}_n\}$ este un sistem maximal de vectori liniar independenţi, atunci $\forall \bar{v} \in V \setminus B$ sistemul $B \cup \{\bar{v}\}$ este liniar dependent şi există scalarii $\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda$ nu toţi nuli, astfel ca

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + ... + \lambda_n \bar{v}_n + \lambda \bar{v} = \bar{0}$$

Putem presupune că $\lambda \neq 0$ căci, altfel, relaţia $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{v}_i = \bar{0}$ implică $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, deoarece B este sistem independent.

Împărţind acum cu $(-\lambda)$ şi notând $-\frac{\lambda_i}{\lambda} = \alpha_i (i = 1,2,...,n)$, obţinem relaţia

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + ... + \alpha_n \bar{v}_n$$

ceea ce arată că $\langle S \rangle = V$, adică are loc (B_2) şi B este o bază.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Nu rezultă din cele de mai sus că nu pot exista în V mai multe sisteme maximale B, B', B",... liniar independente, dar este evident că nici unul dintre acestea nu poate conține un număr diferit de vectori față de celelalte.

Avem, în virtutea propoziției 5.5.41. că sistemele B, B', B", ... sunt baze ale spațiului V de tip finit. Rezultă că un spațiu vectorial de tip finit v, care admite o bază, are de fapt o infinitate de baze, toate conținând același număr de vectori.

Definiția 2.6.1.2. *Se numește* ***dimensiune*** *a spațiului vectorial V peste corpul K numărul elementelor uneia dintre bazele sale;acest număr se notează* $\dim_K V$.

Astfel, dacă baza B a lui V are n elemente vom spune că spațiul liniar respectiv este **n-dimensional** peste corpul K și vom nota acest fapt prin

$$\dim_K V = n.$$

Dacă V nu este de tip finit spunem că V este spațiu liniar **∞-dimensional** și scriem

$$\dim_K V = \infty.$$

Dimensiunea unui spațiu vectorial de tip finit reprezintă, deci, numărul maxim de elemente al sistemelor sale de vectori liniar independente.

Observație. Există spații vectoriale de tip finit care nu admit nici o bază.

Spațiul vectorial trivial $V_0 = \{\bar{0}\}$ conținând ca unic vector, vectorul nul $\bar{0}$ (aparținând unui K-spațiu V), nu posedă sisteme de vectori liniar independente (propoziția 2.5.1.2) și, în consecință, unicul său sistem $\{\bar{0}\}$ nu satisface condiția (B_1). Asfel, spațiul liniar $\{\bar{0}\}$ nu posedă nici o bază și convenim să spunem că

$$\dim_K \{\bar{0}\} = 0$$

Propoziția 2.6.1.2. (Teorema de existență a bazelor). *Orice spațiu liniar netrivial de tip finit admite cel puțin o bază algebrică.*

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Fie X un sistem complet de vectori ai K-spațiului V, adică un sistem de vectori pentru care $\langle X \rangle = V$. Acesta există, căci poate fi luat, de exemplu, chiar X=V. În X se găsesc vectori nenuli, căci, altfel, $\langle X \rangle = \{\bar{0}\} \neq V$. Fie $\Im(X)$ familia tuturor subsistemelor liniar independente de vectori din X. Cum pentru $\bar{v} \in X, \bar{v} \neq \bar{0}$, avem sistemul $\{\bar{v}\}$ liniar independent, rezultă că $\Im(X) \neq \phi$.

Considerăm $\Im(X)$ ordonată în raport cu incluziunea $(\Im(X), \leq)$.

Fie $(S_\alpha)_{\alpha \in A}, (S_\alpha \in \Im(X))$ o parte a sa total (liniar) ordonată:

$S_{\alpha_1} \subseteq S_{\alpha_2} \subseteq \ldots$, pentru care $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ şi $B = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$.

Se verifică uşor că B este un sistem de vectori liniar independent în V; este suficient să arătăm că orice subsistem finit $\{\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n}\} \subset B$ este liniar independent. Reținem din familia A indicii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ pentru care $S_{\alpha_1} \ni \overline{v_1}, S_{\alpha_2} \ni \overline{v_2}, \ldots, S_{\alpha_m} \ni \overline{v_m}$ şi, cum familia $\{S_\alpha\}$ este total ordonată, există $r \in N, 1 \leq m \leq r$, astfel ca $S_{\alpha_r} \supset S_{\alpha_j}, \forall j = 1,2,\ldots,m$.

Rezultă că sistemul liniar independent $S_{\alpha_r} (\in \{S_\alpha\})$ conține ca sisteme pe $\{\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_m}\}$ care, prin aceasta, nu poate fi decât liniar independent.

Aplicăm familiei $\{S_\alpha\}$ Axioma lui Zorn: Orice mulțime inductiv ordonată posedă elemente maximale.

Fie $B = \{\overline{e_i}\}_{i \in I}$ elementul maximal al acestei mulțimi. Am văzut că B este liniar independent.

Să arătăm că $\langle B \rangle = V$. Fie $\bar{v} \in V, \bar{v} \neq \bar{0}$. Dacă $\bar{v} \in \langle B \rangle$ atunci sistemul $\{\bar{v}\} \cup B \equiv B'$ ar fi liniar independent, ceea ce contrazice maximalitatea lui B. Rezultă că $\bar{v} \in \langle B \rangle$ şi deci $V \subset \langle B \rangle$.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel B este un sistem complet de vectori liniar independenți în V, adică este o bază a spațiului.

Propoziția 2.6.1.3. (Teorema completării). *Fie X un sistem de generatori ai spațiului liniar V. Orice subsistem $S(\subset X)$ liniar independent poate fi completat cu vectori din X pâna la obținerea unei baze B a spațiului vectorial V.*

Demonstrație. Afirmația este o consecință a propoziției 2.4.1.2, căci dacă X este un sistem complet de vectori din V, $S \in \Im(X)$ - mulțimea care este (inductiv) ordonată în raport cu incluziunea şi, deci, admite un element maximal B. Astfel B este sistem maximal de vectori liniar independenți ai lui V, adică bază a acestui spațiu (conform reciprocei propoziției 2.4.1.1). În plus $S \subseteq B \subseteq X$.

Propoziția 2.6.1.4. (Teorema înlocuirii). *Fie $B = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}\}$ o bază a spațiului liniar V şi $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_r}\}$ un sistem de vectori liniar independent al acestui spațiu. Atunci $r \le n$ şi înlocuind r dintre vectorii bazei B cu vectorii sistemului considerat se obține sistemul $S' = \{\overline{v_1}, ..., \overline{v_r}, \overline{v_{r+1}}, ..., \overline{v_n}\}$ care este bază*

.

Exemple. Cele de mai jos furnizează exemple de bază pentru spațiile vectoriale prezentate în paragraful 5.2.

1) În K-spațiul K^n sistemul de vectori $B^0 = S$ este bază.

$B^0 = \{(1,0,...,0),(0,1,...,0),...,(0,0,...,0,1)\}$ este numită baza canonică a spațiului aritmetic n-dimensional K^n inclusiv a fiecăruia dintre spațiile aritmetice R^n, C^n.

2) În K-spațiul $M(m,nK)$ baza canonică este dată de sistemul de matrice

$$B^0 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, ..., \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \{E_j^i\}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $E_j^i (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ este matricea care are elementul 1 la intersecţia liniei i cu coloana j; în rest tote elementele sunt nule.

Baza conţin un număr de $m \cdot n$ elemente; astfel

$$\dim_K M(m,n \in K) = m \cdot n$$

3) În R-spaţiul C şi în R-spaţiul H bazele canonice sunt respectiv

$$B_C = \{1, i\} \text{ şi } B_H = \{1, i, j, k\}$$

unde elementele componente sunt cele precizate în paragraful 1..

4) În K-spaţiul $K^n[x]$ baza canonică constă din polinoamele sistemului

$$B = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$$

şi, cum $\dim B = n+1$, rezultă că $\dim_K K_n[x] = n+1$.

5) În K-spaţiul S(K) baza canonică constă din şirurile;

$$\tau_1^0 = (1,0,...,0,...), \tau_2^0 (0,1,0,...,0,...), ...;$$

în acest caz avem $\dim_K S(K) = \infty$ .Aceeaşi bază poate fi considerată şi pentru $S_C(K)$.

Spaţiile vectoriale în care nu pot fi puse în evidenţă baze se consideră ∞- dimensionale.

2.6.2. Reprezentarea analitică a vectorilor

În cele ce urmează vom avea în vedere numai cazul spaţiilor vectoriale de dimensiune finită.

Presupunem că în K-spaţiul V de dimensiune n se fixează baza B şi că elementele acesteia, vectorii $\overline{e_i}, i = 1,2,...,n$ se constituie într-o mulţime ordonată:

$$B = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}) \equiv (\overline{e_i})_n .$$

Conform definiţiei (B_2) orice vector $\bar{v} \in V$ poate fi reprezentat printr-o descompunere după elementele lui B cu operatori din corpul K de forma

Scanned with OKEN Scanner

$$\bar{v} = x^1\overline{e_1} + x^2\overline{e_2} + ... + x^n\overline{e_n} \qquad (2.5.2.1)$$

care conform lui (B_1) şi propoziţiei 2.5.2.1, este unică.

Există deci un singur mod de a reprezenta un vector al spaţiului într-o bază dată; această reprezentare este numită **expresia analitică a vectorului**.

Evident, în baze diferite, acelaşi vector va avea expresii analitice diferite.

De aceea, fiecărei baze i se asociază aplicaţia ce apare în:

Definiţia 2.6.2.1. *Se numeşte* ***sistem de coordonate*** *pe K-spaţiul liniar V, asociat bazei* $B = (\overline{e_i})_n$, *aplicaţia bijectivă definită prin*

$$\varphi_B : V \to K^n, \varphi_B(\bar{v}) = (x^1, x^2, ..., x^n) = x, (x \in R^n) \qquad (2.5.2.2)$$

unde numerele $x^i \in K, (i = 1,2,...,n)$ *sunt scalarii reprezentării (2.5.2.1) a vectorului* $\bar{v}$ *în baza B şi se numesc* ***coordonate ale vectorului*** *în această bază.*

Fiecare bază determinând un sistem de coordonate, adesea se consideră că o bază dată în V joacă rolul unui sistem de coordonate şi se identifică cu acesta. Dacă baza este fixată în V sistemul de coordonate va fi notat, simplu, φ, iar componentele sale $(\varphi^1, \varphi^2, ..., \varphi^n)$, definite prin

$$\varphi^i(\bar{v}) = x^i, (i = 1,2,...,n) \qquad (2.5.1.3)$$

care asociază vectorului $\bar{v}$ coordonatele sale de rang i, sunt funcţii scalare de variabilă vectorială $(\varphi^i : V \to K)$, numite funcţii coordonate (sau proiecţii de rang i).

Proiecţiile corespunzătoare sistemelor de coordonate într-o bază canonică se numesc **proiecţii canonice** şi se notează

$$\varphi_0^i = pr_i, (pr_i\bar{v} = x^i, \text{ pentru } \bar{v} = \sum_{i=1}^{n} x^i \overline{e_i^0}).$$

Vom preciza în continuare alte moduri de scriere ale expresiei analitice a vectorului $\bar{v}$ într-o bază dată B.

Scanned with OKEN Scanner

1. Scrierea restrânsă. Vom folosi în acest scop următoarea regulă, cunoscută sub denumirea de **convenție Einstein.**

Dacă într-un monom (termen) al unei sume apare același indice la doi factori, plasat într-o poziție la exponent și în alta la deponent, atunci se subânțelege că acesta este un indice de sumare și se efectuează sumarea temenilor în raport cu variația sa între valorile precizate separat fără a ami folosi în acest scop simbolul grafic al sumării.

Astfel, suma ce apare în reprezentarea (2.5.1.1) a vectorului $\bar{v}$ poate fi scrisă concentrat sub forma

$$\bar{v} = x^i \overline{e_i} (i = 1,2,...,n) \qquad (2.5.1.1')$$

Acest mod de scriere prezintă avantaje atunci când numărul factorilor (și, deci al indicilor) este mare.

2. Scrierea matriceală. Vom asocia sistemelor de coordonate ale vectorilor și sistemelor de vectori ai bazelor matrice, în felul următor:

-matrice-coloană pentru coordonatele unui vecor

$$(x \to) \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \cdots \\ x^n \end{pmatrix} (\in M(n,1;K));$$

-matrice-linie pentru componentele unei baze

$$(B \to) \quad E = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}),$$

simbolul $\to$ indicând asocierea sau faptul că **lui ... i se pune în corespondență ....**

Astfel, aceeași reprezentare a vectorului $\bar{v}$ poate fi scrisă sub forma

$$\bar{v} = E \cdot X$$

Acest mod de scriere prezintă avantaje privind scurtarea calculului algebric ce conduce la rezultat prin folosirea operațiilor matriceale.

Scanned with OKEN Scanner

2.6.3. Rangul unui sistem de vectori

Definiția 2.6.3.1. *Se numește* ***rang*** *al sistemului de vectori* $S = \{\overline{v_i}\}(\subset V)$ *numărul elementelor unui sistem maximal de vectori liniar independenți conținut de sistemul dat; acest număr se notează* rgS.

Propoziția 2.6.3.1.(Teorema rangului). Dacă S este un sistem finit conținând m vectori ai K-spațiului V_n, atunci rangul lui S este rangul matricei coordonatelor vectorilor liu S într-o bază a spațiului şi avem

$rgS = r \leq \min\{m, n\}$.

Demonstrație. Putem presupune, eventual ca urmare a unei renumerotări, că primii r vectori ai sistemului $S = \{\overline{v_1}, ..., \overline{v_r}, \overline{v_{r+1}}, ..., \overline{v_m}\}$ sunt liniar independenți.o. Asfel, vectorii $\overline{v_{r+k}}(k = 1,2,..., m-r)$ depind în S de primii r vectori, căci subsistemul lor este maximal în S, şi avem relațiile de descompunere

$$\overline{v_{r+k}} = \alpha_k^l \overline{v_l}, (l = 1,2,..., r).$$

Scriem acum expresiile analitice în baza $B = (\overline{e_i})_n$ ale vectorilor $\overline{v_l}$. Avem:

$$\overline{v_l} = x_l^i \overline{e_i}, (i = 1,2,...., n)$$

şi

$$\overline{v_{r+k}} = (\alpha_{r+k}^l \ x_l^i)\overline{e_i}, (k = 1,2,..., m-r).$$

Asociem acestui sistem de vectori matricea coordonatelor în baza B, scriind pe coloane scalarii fiecărei descompuneri, dând valori lui r şi k în intervalele specificate:

Scanned with OKEN Scanner

$$A=\begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_r^1 & \alpha_{r+1}^l x_l^1 & \dots & \alpha_m^l x_l^1 \\ x_1^2 & \dots & x_r^2 & \alpha_{r+1}^l x_l^2 & \dots & \alpha_m^l x_l^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & \dots & x_r^n & \alpha_{r+1}^l x_l^n & \dots & \alpha_m^l x_l^n \end{pmatrix}, (l=1,2,\dots,r)$$

Observăm că matricea A are rangul $\leq r$ deoarece ultimele sale m-r coloane sunt combinații liniare ale primelor r coloane şi astfel, minorii de rang r+k (k=1,...,m-r) sunt toți nuli.

Deoarece $\{\overline{v_1},\dots,\overline{v_r}\}$ este sistem independent rezultă că

$$\alpha_1\overline{v_1}+\dots+\alpha_r\overline{v_r}=\overline{0}$$

are loc numai dacă $\alpha_l=0(l=1,\dots,r)$, adică sistemul liniar de tip (n,r) în necunoscutele $\alpha_1,\dots,\alpha_r$

$$\begin{cases} x_1^1\alpha_1+x_2^1\alpha_{2\ 2}+\dots+x_r^1\alpha_r=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1^n\alpha_1+x_2^n\alpha_2+\dots+x_r^n\alpha_r=0 \end{cases}$$

trebuie să admită numai soluția banală, ceea ce are loc numai dacă în matricea coeficienților $[x_l^i]$ există un minor nenul de rangul r.

Astfel, rezultă că $rangA\geq r$.

Din cele două inegalități de sens invers deducem că $rgS=rangA(=r)$. Evident, acest rang nu poate depăşi pe nici unul dintre numerele naturale m,n care reprezintă numărul de linii, respectiv de coloane ale lui A.

2.6.4. Schimbarea bazelor unui spațiu vectorial

Fie V un K-spațiu liniar n-dimensional pentru care se consideră simultan două baze $B=(\overline{e_i})_n$ şi $B'=(\overline{e_r}')_n$. Deoarece fiecare dintre sistemele de vectori B şi B' este un sistem de

Scanned with OKEN Scanner

generatori, adică $\langle B\rangle = \langle B'\rangle = V$, rezultă că pentru a exprima vectorii unei baze cu cei ai celeilalte baze prin intermediul unor reprezentări liniare peste corpul K de tipul (2.5.2.1).

Astfel, sistemele de n+1 vectori $\overline{B_r} = \{\overline{e_1},...,\overline{e_n},\overline{e_r}'\}$ pentru orice r=1,2,...,n fiind liniar dependente, căci $\dim_K V = n$ şi B este sistem maximal de vectori liniar independenți în V, avem descompunerile

$$\begin{array}{lll} r=1 & : & \overline{e_1}' = a_1^1\overline{e^1} + a_1^2\overline{e_2} + ... + a_1^n\overline{e_n} \\ r=2 & : & \overline{e_2}' = a_2^1\overline{e_1} + a_2^2\overline{e_2} + ... + a_2^n\overline{e_n} \\ ... & ... & ..... \\ r=n & : & \overline{e_n}' = a_n^1\overline{e_1} + a_n^2\overline{e_2} + ... + a_n^n\overline{e_n} \end{array}$$

care pot fi scrise restrâns sub forma

$$\overline{e_r}' = a_r^i\overline{e_i} \quad ,(i,r=1,2,...,n) \qquad (2.5.4.1)$$

unde scalarii descompunerilor a_r^i sunt n^2 numere ale corpului K, reprezentând coordonatele vectorilor bazei B' relativ la baza B.

În (2.5.4.1) indicele r este indice de numerotare, iar i, indice de sumare.

Cum sistemele de vectori B şi B' sunt liniar independente rezultă că matricea $[a_r^i] \in M(n;K)$ a coordonatelor bazei B' este o matrice pătratică nesingulară, adică $\det[a_r^i] \neq 0$ căci avem $rgB' = n$.

Transpusa acesteia

$$[a_i^r] = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & ... & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_1^n & a_2^n & ... & a_n^n \end{bmatrix} = T_{BB'}$$

numită matricea de trecere de la baza B la baza B', este, de asemenea, matrice nesingulară; această matrice conține pe coloana i (i=1,2,...,n) coordnatele vectorului $\overline{e_i}'$ descompus în bza B.

Scanned with OKEN Scanner

Cu ajutorul acesteia şi notând prin

$E=[\overline{e_1},\overline{e_2},...,\overline{e_n}]$ şi $E'=[\overline{e_1}',\overline{e_2}',...,\overline{e_n}']$

matricele-linie ale vectorilor celor două baze, putem transcrie matriceal schimbarea de baze $B \to B'$, descrisă de relaţiile (5.5.4.1) sub forma:

$$E'=E\cdot T_{BB'}.$$

Invers, putem exprima vectorii bazei vechi în funcţie de cei ai bazei noi prin relaţii analoage

$$\overline{e_j}=b_j^r\overline{e_r}' \ ,(j,r=1,2,...,n) \qquad (2.5.4.2)$$

sau

$$E=E'\cdot T_{B'B} \qquad (2.5.4.2')$$

unde $T_{B'B}=[b_r^j](\in M(n;K))$ este matricea de trecere de la baza B' la baza B, având, de asemenea, proprietatea că este nesingulară.

Propoziţia 2.6.4.1. *Dacă în K-spaţiul V se consideră o schimbare de baze* $B \to B'$, *având matricea de trecere* $T_{BB'}$, *atunci*

schimbarea inversă $B' \to B$ *este descrisă de matricea inversă, adică*

$$T_{B'B}=T_{BB'}^{-1} \qquad (2.5.4.3)$$

Demonstraţie. Fie $T=[a_i^r]$ matricea de trecere $T_{BB'}$ de la baza B la bazza B' şi $\widetilde{T}=[b_r^j]$ matricea trecerii inverse $T_{B'B}$ de la baza B' la B; avem $T,\widetilde{T}\in M(n;K)$ şi $\det T\neq 0\neq \det\widetilde{T}$. şchimbările de baze considerate sunt descrise, respectiv, de relaţiile (2.5.4.1) şi (2.5.4.2).

Înlocuind reprezentările vectorilor bazei B' date de (2.5.4.1) în relaţiile (2.5.4.2), obţinem succesiv

$$\overline{e_j}=b_j^r(a_r^i\overline{e_i})=(b_j^r a_r^i)\overline{e_i}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi, cum aceste relaţii exprimă vectorii bazei b în funcţie de ei înşişi, trebuie să avem

$$b_j^r a_r^i = \delta_j^i \qquad (2.5.4.4)$$

unde

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad (2.5.4.5)$$

sunt, ceea ce numim **simbolii lui Kronecker.**

Relaţia (2.5.4.4) se scrie matriceal sub forma

$$t_{\widetilde{T}} \cdot t_T = I_n ,$$

unde $I_n = [\delta_j^i] (\in M(n,K))$ este matricea unitate de ordinul n.

Prin transpunere, relaţia precedentă conduce la

$$T \cdot \widetilde{T} = I_n$$

iar aceasta din urmă ne dă

$$\widetilde{T} = T^{-1} .$$

2.6.5. Legea de schimbare a coordonatelor unui vector

Ca urmare a efectuării unei schimbări de baze în spaţiul vectorial V, deoarece reprezentarea unui vector $\bar{v} \in V$ într-o bază a spaţiului este unică, rezultă că vectorul considerat va avea coordonate diferite în raport cu fiecare dintre aceste baze.

Asfel, dacă $B \to B'$ este schimbarea de baze considerată, vectorul $\bar{v}$ admite următoarele descompuneri după vectorii bazelor B, respectiv B'.

$\bar{v} = x^i \overline{e_i}, \bar{v} = x'^r \overline{e_r'}, (i, r = 1,2,...,r)$ (2.5.5.1)

Cu relaţiile (2.5.4.1), care definesc trecerea de la baza B la baza B', pentru cea de-a doua expresie analitică a lui $\bar{v}$, avem

$$\bar{v} = x'^r (a_r^i \overline{e_i}) = (x'^r a_r^i) \overline{e_i} ,$$

Scanned with OKEN Scanner

care, comparată cu prima expresie analitică a vectorului, conduce la

$$x^i = a^i_r x'^r \qquad (2.5.5.2)$$

Pentru a obține (5.5.5.2), numită **legea deschimbare a coordonatelor** unui vector $\bar{v} \in V$, s-a făcut uz de teorema de unicitate a descompunerii şi de comutativitatea corpului K.

Această lege poate fi scrisă sub forma matriceală

$$X_B = T_{BB'} \cdot X_{B'} \qquad (2.5.5.2')$$

unde $X_B, X_{B'}$ sunt matricele-coloană ale coordonatelor vectorului $\bar{v}$, respectiv, în bazele B,B', iar $T_{BB'}$ este matricea de trecere de la baza B la baza B'.

Detaliat, relațiile (2.5.5.2) şi (2.5.5.2') se scrie:

$$\begin{cases} x^1 = a^1_1 x'^1 + a^1_2 x'^2 + \ldots + a^1_n x'^n \\ x^2 = a^2_1 x'^1 + a^2_2 x'^2 + \ldots + a^2_n x'^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = a^n_1 x'^1 + a^n_2 x'^2 + \ldots + a^n_n x'^n \end{cases}.$$

În final, să observăm că această lege diferă prin poziția elementelor noi (coordonatele lui $\bar{v}$ relative la baza B') față de cele vechi (coordonatele lui $\bar{v}$ relative la baza B) de legea 2.5.4.1 care definește schimbarea bazelor în $\bar{v}$. Din acest motiv se spune că (2.5.5.2) este o **lege de contravarianță** în raport cu legea de schimbare a bazelor în spațiul vectorial V. S-a stabilit, astfel, în cadrul acestei secțiuni, următorul rezultat:

Propoziția 2.6.5.1. *Coordonatele oricărui vector aparținând unui spațiu vectorial peste un corp de scalari se schimbă după o lege de contravarianță atunci când se face o schimbare de baze în spațiul respectiv.*

Scanned with OKEN Scanner

3. APLICAȚII LINIARE

3.1. Aplicații liniare între spații vectoriale

3.1.1. Definiția aplicațiilor liniare. Exemple. Proprietăți

Fie V şi W două spații vectoriale peste același corp K.

Definiția 3.1.1.1. *O aplicație* $f: V \to W$ *ce satisface condițiile*

1) $f(\overline{v_1} + \overline{v_2}) = f(\overline{v_1}) + f(\overline{v_2}), \forall \overline{v_1}, \overline{v_2} \in V$ *(f este aditivă);*

2) $f(\alpha \overline{v}) = \alpha f(\overline{v}), \forall \alpha \in K, \forall \overline{v} \in V$ *(f este omogenă).*

se numeşte ***aplicație liniară*** *(sau* ***morfism*** *de spații vectoriale).*

Dacă $V=W$, atunci f se numeşte **operator liniar** (sau **endomorfism**) al lui V. Dacă f este injectivă (surjectivă, respectiv bijectivă), atunci f se numeşte **monomorfism(epimorfism,** respectiv **izomorfism)**;un endomorfism bijectiv al lui V se numeşte **automorfism** al lui V.

Propoziția 3.1.1.1. *O aplicație* $f: V \to W$ *este aplicație liniară dacă şi numai dacă:*

3) $f(\alpha \overline{v_1} + \beta \overline{v_2}) = \alpha f(\overline{v_1}) + \beta f(\overline{v_2}), \forall \alpha, \beta \in K, \forall \overline{v_1}, \overline{v_2} \in V$

Demonstrație. Dacă f este aplicație liniară, atunci:

$$f(\alpha \overline{v_1} + \beta \overline{v_2}) = f(\alpha \overline{v_1}) + f(\beta \overline{v_2}) = \alpha f(\overline{v_1}) + \beta f(\overline{v_2}).$$

Reciproc, din 3) pentru $\alpha = \beta = 1$ respectiv $\forall \alpha \in K, \beta = 0$ deducem că f satisface condițiile 1) respectiv 2) din Definiția 3.1.1.1.

Observație Dacă $f: V \to W$ este o aplicație liniară şi $\overline{v} = \alpha^i \overline{v_i} \in V$, atunci $f(\overline{v})$ este o combinație linară a vectorilor $f(\overline{v_1}), \ldots, f(\overline{v_n})$ cu aceiaşi coeficienți $\alpha^i, i = 1,2,\ldots,n; f(\overline{v}) = \alpha^i f(\overline{v_i})$.

Consecința 3.1.1.1. Fie $f: V \to W$ o aplicație liniară; atunci

1) $f(-\overline{v}) = -f(\overline{v}), \forall \overline{v} \in V$;

Scanned with OKEN Scanner

2) $f(\overline{0_V}) = \overline{0_W}$.

Demonstrație.

1) $f[(-1)\bar{v}] = (-1)f(\bar{v})$ şi deci $f(-\bar{v}) = -f(\bar{v})$.

2) $f(\overline{0_V}) = f(\bar{v} - \bar{v}) = f(\bar{v}) + f(-\bar{v}) = f(\bar{v}) - f(\bar{v}) = \overline{0_W}$.

Exemple

1) Fie V un spațiu vectorial peste K de dimensiune n şi $B = \{\overline{v_i}\}_n$ o bază a sa . Aplicația $f : V \to K^n$, definită prin:

$$f(\bar{v}) = (\alpha^1, ..., \alpha^n), \forall \bar{v} \in V, \bar{v} = \alpha^i \overline{v_i}$$

este o aplicație liniară, chiar un izomorfism de spații vectoriale.

2) Fie $C^0([a,b],R)$ spațiul liniar al funcțiilor reale de o variabilă reală continuă pe $[a,b]$. Aplicația

$$I : C^0([a,b],R) \to C^0([a,b],R)$$

definită prin

$$[I(f)](x) = \int_a^x f(t)dt, \forall x \in [a,b]$$

este o aplicație liniară.

3) Fie $C^1((a,b),R)$ spațiul liniar al funcțiilor reale de o variabilă reală, derivabile cu derivata continuă pe (a,b).

Aplicația $D : C^1((a,b),R) \to C^0((a,b),R)$ definită prin $D(f) = f'$ este o aplicație liniară.

3.1.2. Proprietăți ale aplicațiilor liniare

Să notăm $L(V,W)$ mulțimea aplicațiilor liniare de la V la W:

$$L(V,W) = \{f : V \to W \mid f \text{ liniară}\}$$

Propoziția 3.1.2.1. Fie V,W spații vectoriale peste K şi $f,g \in L(V,W)$

Atunci:

1) $f + g \in L(V,W)$;

2) $\gamma f \in L(V,W), \forall \gamma \in K$.

Demonstrație. $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \overline{v_1}, \overline{v_2} \in V$:

Scanned with OKEN Scanner

$$(f+g)(\alpha\overline{v_1}+\beta\overline{v_2}) = f(\alpha\overline{v_1}+\beta\overline{v_2}) + g(\alpha\overline{v_1}+\beta\overline{v_2})$$

$$= \alpha f(\overline{v_1}) + \beta f(\overline{v_2}) + \alpha g(\overline{v_1}) + \beta g(\overline{v_2})$$

$$= \alpha(f+g)(\overline{v_1}) + \beta(f+g)(\overline{v_2}) \Rightarrow 1)$$

$$(\gamma f)(\alpha\overline{v_1}+\beta\overline{v_2}) = \gamma f(\alpha\overline{v_1}+\beta\overline{v_2})$$

$$= \gamma[\alpha f(\overline{v_1}) + \beta f(\overline{v_2})]$$

$$= \alpha(\gamma f)(\overline{v_1}) + \beta(\gamma f)(\overline{v_2}) \Rightarrow 2).$$

Propoziția 3.1.2.2. *Fie U,V,W spații vectoriale peste K și fie $f \in L(U,V), g \in L(V,W)$. Atunci $g \circ f \in L(U,W)$.*

Demonstrație. $\forall \alpha,\beta \in K, \forall \overline{v_1}, \overline{v_2} \in U$:

$$(g \circ f)(\alpha\overline{v_1}+\beta\overline{v_2}) = g(f(\alpha\overline{v_1}+\beta\overline{v_2})) = g(\alpha f(\overline{v_1}) + \beta f(\overline{v_2}))$$

$$= \alpha g(f(\overline{v_1})) + \beta g(f(\overline{v_2})) = \alpha(g \circ f)(\overline{v_1}) + \beta(g \circ f)(\overline{v_2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g \circ f \in L(U,W).$$

Prin verificarea axiomelor din definiția spațiului liniar se argumentează imediat:

Propoziția 3.1.2.3. *$L(V,W)$ este un spațiu liniar peste K în raport cu adunarea aplicațiilor liniare și înmulțirea unei aplicații liniare cu un element din K.*

Propoziția 3.1.2.4. *Fie $f \in L(V,W)$ și $S = \{\overline{v_i}\}_m \subset V$. Dacă $S = \{f(\overline{v_i})\}_m \subset W$ este un sistem liniar independent, atunci și sistemul S este liniar independent.*

Demonstrație. Să presupunem, prin absurd că S este un sistem liniar dependent, adică există o combinație liniară nulă de vectorii lui S, $\alpha^i \overline{v_i} = \overline{0_V}$, în care nu toți scalarii sunt nuli.

Atunci din $f(\alpha^i \overline{v_i}) = \alpha^i f(\overline{v_i})$ și $f(\overline{0_V}) = \overline{0_W}$ deducem că există combinația liniară nulă $\alpha^i f(\overline{v_i}) = \overline{0_W}$ de vectori ai sistemului S, în care nu toți scalarii sunt nuli, absurd.

Scanned with OKEN Scanner

Propoziția 3.1.2.5. *Fie* $f \in L(V,W)$ *un monomorfism. Dacă* $S = \{\overline{v_i}\}_m \subset V$ *este un sistem liniar independent, atunci și* $S = \{f(\overline{v_i})\}_m \subset W$ *este liniar independent.*

Demonstrație. Fie o combinație liniară nulă de vectori din S:

$$\alpha^i f(\overline{v_i}) = \overline{0_W};$$

f fiind o aplicație liniară, $f(\alpha^i \overline{v_i}) = \overline{0_W}$ și $f(\overline{0_V}) = \overline{0_W}$; f fiind injectivă rezultă că $\alpha^i \overline{v_i} = \overline{0_V}$. Dar S este liniar independent, deci $\alpha^i = 0, i = 1,2,...,m$.

Propoziția 3.1.2.6. *Fie* $f \in L(V,W)$, $B = \{\overline{v_i}\}_m$ *o bază în* V *și* $B' = \{f(\overline{v_i})\} \subset W$. *Atunci:*

1) Dacă f este monomorfism, B' este liniar independent.

2) Dacă f este epimorfism, B' este sistem de generatori pentru W.

3) Dacă f este izomorfism, B' este bază în W.

Demonstrație. 1) Deoarece B este liniar independent din Propoziția 1.2.5 rezultă că B' este liniar independent.

2) f fiind surjectivă, $\overline{w} \in W, \exists \overline{v} \in V$ astfel ca $f(\overline{v}) = \overline{w}$; fie $\overline{v} = \alpha^i \overline{v_i}$, atunci $\overline{w} = f(\overline{v}) = \alpha^i f(\overline{v_i})$, deci $\forall \overline{w} \in W, \exists \alpha^i \in K, i = 1,2,...,n$ așa ca $\overline{w} = \alpha^i f(\overline{v_i})$, ceea ce trebuia demonstrat.

3) rezultă imediat din 1) și 2).

Propoziția 3.1.2.7. *Dacă* $f \in L(V,W)$ *și* $S \subset V$ *este un subspațiu vectorial atunci mulțimea* $f(S) = \{\overline{w} \in W \mid \exists \overline{v} \in S; f(\overline{v}) = \overline{w}\}$ *este un subspațiu vectorial al lui W.*

Demonstrație. $\forall \alpha, \beta \in K$ și $\overline{w_1}, \overline{w_2} \in f(S)$, $\exists$ $\overline{v_1}, \overline{v_2} \in S$ astfel încât $f(\overline{v_1}) = \overline{w_1}$ și $f(\overline{v_2}) = \overline{w_2}$; atunci:

$$\alpha \overline{w_1} + \beta \overline{w_2} = \alpha f(\overline{v_1}) + \beta f(\overline{v_2}) = f(\alpha \overline{v_1} + \beta \overline{v_2}),$$

adică

$$\alpha \overline{w_1} + \beta \overline{w_2} \in f(S),$$

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce trebuia demonstrat.

Aplicațiile liniare sunt aplicații a căror acțiune este cunoscută dacă aceasta este cunoscută pe vectorii unei baze, lucru confirmat şi de

Propoziția 3.1.2.8. *O aplicație liniară este unic determinată de acțiunea sa pe o bază.*

Demonstrație. Fie $B = \{\overline{v_i}\}_n \subset V$ o bază şi $f \in L(V,W)$, atunci, $\forall \bar{v} \in V$ cu $\bar{v} = \alpha^i \overline{v_i}$, $f(\bar{v}) = f(\alpha^i \overline{v_i}) = \alpha^i f(\overline{v_i})$, deci f este cunoscută dacă sunt cunoscuți vectorii $\overline{w_i} = f(\overline{v_i}), i = 1,2,...,n$.

Să presupunem că $\exists g \in L(V,W)$ cu $g(\overline{v_i}) = \overline{w_i}$. Atunci

$$g(\bar{v}) = g(\alpha^i \overline{v_i}) = \alpha^i g(\overline{v_i}) = \alpha^i \overline{w_i} = \alpha^i f(\overline{v_i}) = f(\alpha^i \overline{v_i}) = f(\bar{v}),$$

deci $g = f$.

3.2. Nucleul şi imaginea unei aplicații liniare

Fie V şi W două spații liniare peste K şi $f \in L(V,W)$ o aplicație liniară dată.

Definiția 3.2.1. Mulțimea $Ker\ f = \{\bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \overline{0_W}\}$ se numeşte **nucleul** aplicației liniare *f*.

Observație. $Kerf \supset \{\overline{0_V}\}$.

Propoziția 3.2.1. $Kerf$ este un subspațiu liniar al lui V.

Demonstrație. $\forall \alpha, \beta \in K$ şi $\forall \overline{v_1}, \overline{v_2} \in Kerf$, avem:

$$f(\alpha\overline{v_1} + \beta\overline{v_2}) = \alpha f(\overline{v_1}) + \beta f(\overline{v_2}) = \alpha\overline{0_W} + \beta\overline{0_W} = \overline{0_W},$$

deci $\alpha\overline{v_1} + \beta\overline{v_2} \in Kerf$, adică $Kerf$ este subspațiu liniar al lui V.

Propoziția 3.2.2. $f \in L(V,W)$ este o aplicație injectivă dacă şi numai dacă $Ker\ f = \{\overline{0_V}\}$.

Demonstrație. Fie $f \in L(V,W)$ o aplicație injectivă. Să presupunem că există $\bar{v} \in Ker\ f$, $\bar{v} \neq \overline{0_V}$; deoarece f este injectivă,

Scanned with OKEN Scanner

din $f(\bar{v}) = \overline{0_W}$ şi $f(\overline{0_V}) = \overline{0_W}$ deducem că $\bar{v} = \overline{0_V}$, absurd, deci $Kerf = \{\overline{0_V}\}$.

Reciproc, fie $Kerf = \{\overline{0_V}\}$; $\forall \overline{v_1}, \overline{v_2} \in V$ cu $f(\overline{v_1}) = f(\overline{v_2})$, din liniaritatea lui f deducem că $f(\overline{v_1} - \overline{v_2}) = \overline{0_W}$, adică $\overline{v_1} - \overline{v_2} \in Kerf$, deci $\overline{v_1} - \overline{v_2} = \overline{0_V}$ sau $\overline{v_1} = \overline{v_2}$. Aşadar f este injectivă.

Definiţia 3.2.2. *Mulţimea* $\operatorname{Im} f = \{\overline{w} \in W \mid \exists \overline{v} \in V : f(\overline{v}) = \overline{w}\}$ *se numeşte* ***imaginea*** *aplicaţiei liniare f.*

Deducem imediat că este adevărată:

Propoziţia 3.2.3. $\operatorname{Im} f$ *este subspaţiu vectorial al lui W.*

Propoziţia 3.2.4. *Dacă* $f \in L(V,W)$ *atunci*

$$\dim Kerf + \dim \operatorname{Im} f = \dim V \qquad (3.2.1.1)$$

Demonstraţie. Să notăm $\dim Kerf = p$ şi $\dim \operatorname{Im} f = q$. Fie $B = \{\overline{v_i}\}_p$ o bază în $Kerf$ şi $B' = \{\overline{w_{p+j}}\}_q$ o bază în imaginea funcţiei; atunci $f(\overline{v_i}) = \overline{0_W}, i = 1,2,...,p$ şi $\exists \overline{v_{p+j}} \in V, j = 1,2,...,q$ astfel ca $f(\overline{v_{p+j}}) = \overline{w_{p+j}}$.

Pentru a justifica formula de demonstrat este suficient să arătăm că sistemul de $p+q$ vectori $B = \{\overline{v_1},...,\overline{v_p},\overline{v_{p+1}},...,\overline{v_{p+j}}\}$ este o bază în V.

Fie o combinaţie liniară nulă de vectori ai sistemului B:

$$\alpha^k \overline{v_k} = \bar{0} \ , k = 1,2,...,p+q .$$

Din faptul că f este o aplicaţie liniară deducem că

$$\alpha^k f(\overline{v_k}) = \overline{0_W} ;$$

dar

$$f(\overline{v_i}) = \overline{0_W}, i = 1,2,...,p \text{ şi } f(\overline{v_{p+j}}) = \overline{w_{p+j}}$$

deci $\alpha^{p+j} \overline{w_{p+j}} = \overline{0_W}, j = 1,2,...,q$; dar B' este liniar independent, deci $\alpha^{p+j} = 0, j = 1,2,...,q$. Atunci $\alpha^i \overline{v_i} = \overline{0_V}, i = 1,2,...,p$ şi, cum B este sistem liniar independent rezultă că $\alpha^i = 0, i = 1,2,...,p$.

Scanned with OKEN Scanner

În concluzie $\alpha^k \overline{v_k} = \bar{0}$ implică $\alpha^k = 0, k = 1,2,...,p+q$ deci B este liniar independent. B este şi sistem de generatori pentru v căci $\forall \bar{v} \in V, f(\bar{v}) \in W$ şi deci $\exists \beta^j \in K, j = 1,2,...,q$ astfel încât $f(\bar{v}) = \beta^j \overline{w_{p+j}}$ sau $f(\bar{v}) = \beta^j f(\overline{v_{p+j}})$.

Cum f este o aplicaţie liniară rezultă că

$$f(\bar{v} - \beta^j \overline{v_{p+j}}) = \overline{0_W},$$

adică

$$\bar{v} - \beta^j \overline{v_{p+j}} \in Kerf;$$

deci există $\beta^i \in K, i = 1,2,...,p$ astfel încât

$$\bar{v} - \beta^j \overline{v_{p+j}} = \beta^i \overline{v_i}$$

adică $\bar{v} = \beta^i \overline{v_i} + \beta^j \overline{v_{p+j}}$.

Deci $\forall \bar{v} \in V, \exists \beta^k \in K, k = 1,2,...,p+j$ astfel încât: $\bar{v} = \beta^k \overline{v_k}$.

Concluzie. Pentru a determina $\dim Kerf$ şi $\dim \operatorname{Im} f$ se procedează astfel:

Alegem în V o bază $B = \{\overline{v_i}\}_n; \forall \overline{w} \in \operatorname{Im} f, \exists \bar{v} \in V$ astfel încât $f(\bar{v}) = \overline{w}$; fie $\bar{v} = \alpha^i \overline{v_i}$, atunci $\overline{w} = f(\bar{v}) = \alpha^i f(\overline{v_i})$, adică $\{f(\overline{v_i})\}_n$ este un sistem de generatori pentru $\operatorname{Im} f$.

Din teorema rangului deducem că $\dim \operatorname{Im} f$ este egală cu rangul matricei coordonatelor vectorilor sistemului $\{f(\overline{v_i})\}_n$ într-o bază din W; cu aceasta determinată se obţine relaţia din enunţ.

Definiţia 4.2.3. *Se numeşte* ***rangul*** *aplicaţiei liniare* $f \in L(V,W)$ *dimensiunea spaţiului* $\operatorname{Im} f$; *se numeşte* ***defectul*** *aplicaţiei liniare* $f \in L(V,W)$ *dimensiunea nucleului său.*

Scanned with OKEN Scanner

3.3. Matricea asociată unei aplicații liniare

3.3.1. Matricea unei aplicații liniare

Fie V_n şi W_m două spații vectoriale de dimensiune n, respectiv m, $f: V_n \to W_m$ o aplicație liniară, $B = \{\overline{v_i}\}_n$ o bază în V_n şi $\overline{B} = \{\overline{w_j}\}_m$ o bază în W_m. Pentru orice $i = 1,2,...,n$, vectorul $f(\overline{v_i}) \in W_m$ se exprimă ca o combinație liniară a vectorilor bazei $\overline{B}$:

$$f(\overline{v_i}) = \alpha_i^1 \overline{w_1} + \alpha_i^2 \overline{w_2} + ... + \alpha_i^m \overline{w_m}, i = 1,2,...,n$$

adică

$$\begin{cases} f(\overline{v_1}) = \alpha_1^1 \overline{w_1} + \alpha_1^2 \overline{w_2} + ... + \alpha_1^m \overline{w_m} \\ ..... \\ f(\overline{v_n}) = \alpha_n^1 \overline{w_1} + \alpha_n^2 \overline{w_2} + ... + \alpha_n^m \overline{w_m} \end{cases}.$$

Definiția 3.3.1.1. Se numeşte **matricea aplicației liniare** $f \in L(V_n, W_m)$ în perechea de baze B şi $\overline{B}$, matricea $A_{\overline{BB}}$ de tip $m \times n$ care are pe coloana i, *(i=1,2,...,n),* coordonatele vectorului $f(\overline{v_i})$ în baza $\overline{B}$.

Deci

$$A_{\overline{BB}} = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & ... & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & ... & \alpha_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & ... & \alpha_n^m \end{bmatrix}$$

Definiția 3.3.1.2. *Se numeşte* ***matricea operatorului*** $f \in L(V_n)$ *în baza B, matricea* A_B *de tip* $n \times n$ *care are pe coloana i ,(i=1,2,...,n) coordonatele vectorului* $f(\overline{v_i})$ *în baza B.*

Deci, dacă $f(\overline{v_i}) = \alpha_i^j \overline{v_j}, (i, j = 1,2,...,n)$, atunci

Scanned with OKEN Scanner

$$A_B = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{bmatrix}$$

Propoziția 3.3.1.1. *Fie* $f : V_n \to W_m$ *o aplicație liniară ,* $B = \{\overline{v_i}\}_n$ *o bază în* V_n *,* $\overline{B} = \{\overline{w_j}\}_m$ *o bază în* W_m *şi* $A_{\overline{BB}}$ *matricea aplicației liniare f în prechea de baze B şi* $\overline{B}$*. Notând prin* X_B *matricea coloană a coordonatelor vectorului* $\overline{v} \in V$ *în baza B şi prin* $Y_{\overline{B}}$ *matricea coloană a coordonatelor vectorului* $f(\overline{v})$ *în baza* $\overline{B}$*, avem:*

$$Y_{\overline{B}} = A_{\overline{BB}} X_B \qquad (3.3.1.1)$$

Demonstrație. Fie $\overline{v} = x^i \overline{v_i} \in V, f(\overline{v}) = y^j \overline{w_j}, f(\overline{v_i}) = \alpha_i^j \overline{w_j}$. Atunci

$f(\overline{v}) = f(x^i \overline{v_i}) = x^i f(\overline{v_i}) = x^i \alpha_i^j \overline{w_j}$, adică $y^j = x^i \alpha_i^j$. Scriind detaliat avem:

$$\begin{bmatrix} y^1 & y^2 & \dots & y^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^m \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^m \end{bmatrix}$$

sau, transpunând matricele din această egalitate, avem:

$$\begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & \dots & \alpha_n^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \qquad (3.3.1.1')$$

adică (3.3.1.1).

Consecință. Având dată o aplicație liniară $f : V \to W$ şi B, respectiv $\overline{B}$ baze în V, respectiv W, este suficient să cunoaştem matricea aplicației f în perechea de baze $(B, \overline{B})$, $A_{\overline{BB}}$, adică efectul

Scanned with OKEN Scanner

aplicației f asupra vectorilor bazei B, pentru a avea efectul lui f asupra oricărui alt vector din V.

Propoziția 3.3.1.2. (Teorema de reprezentare matriceală a unei aplicații liniare). Fie V şi W două spații liniare peste K, $\dim V = n$ şi $\dim W = m$. Atunci $L(V,W) \cong M(m,n,K)$

Demonstrație. Fie $B = \{\overline{v_i}\}_n$ şi $\overline{B} = \{\overline{w_j}\}_m$ câte o bază în V, respectiv W. Deoarece $f \in L(V,W)$ este unic determinată de matricea sa $A_{\overline{BB}} = [\alpha_i^j]$, deducem imediat că aplicația $F : L(V,W) \to M(m,n,K)$, definită prin $F(f) = A_{\overline{BB}}$ este bijectivă.

Se verifică uşor că F este o aplicație liniară, deci izomorfism: $\forall \alpha,\beta \in K$ şi $\forall f,g \in L(V,W)$, dacă notăm cu $A'_{\overline{BB}} = [\beta_i^j]$ matricea lui g în perechea de baze $(B,\overline{B})$, obținem că:

$$F(\alpha f + \beta g) = [\alpha\alpha_i^j + \beta\beta_i^j] = \alpha[\alpha_i^j] + \beta[\beta_i^j] = A_{\overline{BB}} + A'_{\overline{BB}}.$$

Observație. $\dim L(V,W) = m \cdot n$.

3.3.2. Legea de schimbare a matricei unei aplicații liniare la o schimbare de baze

Fie $f \in L(V,W)$ şi B,B' respectiv $\overline{B},\overline{B'}$ baze în V, respectiv W. Să notăm cu $A_{\overline{BB}}$ şi $A_{\overline{B'B'}}$ matricele lui f, corespunzătoare perechilor de baze $B,\overline{B}$ şi $B',\overline{B'}$. Să stabilim legătura ce există între aceste două matrice.

Propoziția 3.3.2.1.

$$A_{\overline{B'B'}} = T^{-1}_{\overline{BB'}} \cdot A_{\overline{BB}} \cdot T_{BB'} \qquad (3.3.2.1)$$

Demonstrație. Să notăm $X_B, X_{B'}$, matricele coloană ale coordonatelor unui vector $\overline{v} \in V$ şi cu $Y_{\overline{B}}, Y_{\overline{B'}}$, matricele coloană cu coordonatele vectorului $f(\overline{v}) \in W$. Atunci

$$Y_{\overline{B}} = A_{\overline{BB}} X_B, Y_{\overline{B'}} = A_{\overline{B'B'}} X_{B'}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar $X_B = T_{BB'} X_{B'}$ şi $Y_{\overline{B}} = T_{\overline{BB'}} Y_{\overline{B'}}$; aşadar $T_{\overline{BB'}} Y_{\overline{B'}} = A_{\overline{BB}} T_{BB'} X_{B'}$ şi înmulţind la stânga cu $T^{-1}_{\overline{BB'}}$ rezultă $Y_{\overline{B'}} = T^{-1}_{\overline{BB'}} A_{\overline{BB}} T_{BB'} X_{B'}$.

Ţinând cont că f este unic determinat de matricea sa într-o pereche de baze, deducem că are loc formula (3.3.2.1), sau, mai uşor de reţinut

$A_{\overline{B'B'}} = T_{\overline{B'B}} A_{\overline{BB}} T_{BB'}$.

Observaţie. Dacă $f \in L(V)$, procedând ca mai sus se obţine că

$$A_{B'} = T^{-1}_{BB'} A_B T_{BB'} \qquad (3.3.2.2)$$

sau

$$A_{B'} = T_{B'B} A_B T_{BB'} \qquad (3.3.2.2')$$

Observaţie. Pentru fiecare pereche de baze în V respectiv W se poate defini câte un izomorfism al spaţiilor liniare $L(V,W)$ şi $M(m,n,K)$ Analog, se poate justifica şi că $L(V) \cong M(m,n,K)$.

Consecinţă. Dacă în $M(m,n,K)$. (resp. $M(n,n,K)$.) este cunoscută o bază $B = \{\overline{E_i}\}_{m \cdot n}$, F^{-1} fiind izomorfism, deducem că sistemul de vectori $\{F^{-1}(\overline{E_i})\}_{m \cdot n}$ este o bază în $L(V,W)$ (respectiv $L(V)$), iar coordonatele în această bază ale vectorului $f \in L(V,W)$ (respectiv $f \in L(V)$) sunt chiar coordonatele în baza B ale vectorului $F(f)$.

Într-adevăr, dacă $F(f) = y^i \overline{E_i}$ atunci $f = F^{-1}(y^i \overline{E_i}) = y^i F^{-1}(E_i)$.

Propoziţia 3.2.2. *Fie U,V,W spaţii liniare peste corpul K şi $B = \{\overline{u_i}\}_m$, $\overline{B} = \{\overline{v_j}\}_m$, respectiv $\overline{\overline{B}} = \{\overline{w_k}\}_p$ baze în U, V respectiv W. Dacă $f \in L(U,V)$ şi $g \in L(V,W)$ au relativ la aceste baze*

Scanned with OKEN Scanner

matricele $A_{\overline{BB}}$, $A'_{\overline{\overline{BB}}}$, *atunci* $g \circ f \in L(U,W)$ *are în perechea de baze* B *şi* $\overline{B}$ *matricea* $A''_{\overline{\overline{BB}}} = A'_{\overline{\overline{BB}}} \cdot A_{\overline{BB}}$.

Demonstraţie. Notăm : $A_{\overline{BB}} = [\alpha_i^j]$, $A'_{\overline{\overline{BB}}} = [\beta_j^k]$, $A''_{\overline{\overline{BB}}} = [c_i^k]$.

$$(g \circ f)(\overline{u_i}) = g(f(\overline{u_i})) = g(\alpha_i^j \overline{v_j}) = \alpha_i^j g(\overline{v_j}) = \alpha_i^j \beta_j^k \overline{w_k};$$

deci

$$c_i^k = \alpha_i^j \beta_j^k,$$

adică

$$(A''_{\overline{\overline{BB}}})^t = A^t_{\overline{BB}} \cdot A'_{\overline{\overline{BB}}} = (A'_{\overline{\overline{BB}}} \cdot A_{\overline{BB}})^t.$$

Deci $A''_{\overline{\overline{BB}}} = A'_{\overline{\overline{BB}}} \cdot A_{\overline{BB}}$.

Propoziţia 3.3.2.3. *Dacă* $f \in L(V,W)$ *este un izomorfism de spaţii liniare ce are în perechea de baze* $B, \overline{B}$ *matricea* $A_{\overline{BB}}$ *atunci matricea* $A_{\overline{BB}}$ *este nesingulară şi inversa ei* $A^{-1}_{\overline{BB}}$ *este matricea aplicaţiei liniare* f^{-1} *în perechea de baze* $(\overline{B}, B)$.

Demonstraţie. Notând $\overline{B} = \{\overline{v_i}\}_n$, deoarece f este izomorfism sistemul $\{f(\overline{v_i})\}_n$ este o bază în W şi deci $rang A_{\overline{BB}} = n$; adică $A_{\overline{BB}}$ e nesingulară.

Din $f \circ f^{-1} = id_W$ şi $f^{-1} \circ f = id_V$ şi deoarece aplicaţia liniară identică a unui spaţiu liniar V are în orice bază ca matrice, matricea unitate I_n, dacă notăm cu A' matricea lui f^{-1} în perechea de baze $(\overline{B}, B)$, din Propoziţia 3.3.1.2 avem că:

$$A_{\overline{BB}} \cdot A' = A' \cdot A_{\overline{BB}} = I_n$$

deci

$$A' = A^{-1}_{\overline{BB}}.$$

Observaţie. Orice schimbare de baze într-un spaţiu liniar V peste corpul K defineşte un automorfism al spaţiului liniar V.

Într-adevăr, fie $B = \{\overline{v_i}\}_n$ şi $B' = \{\overline{w_j}\}_n$ două baze în V şi

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{cases} \overline{w_1} = \alpha_1^1 \overline{v_1} + \alpha_1^2 \overline{v_2} + \ldots + \alpha_1^n \overline{v_n} \\ \overline{w_2} = \alpha_2^1 \overline{v_1} + \alpha_2^2 \overline{v_2} + \ldots + \alpha_2^n \overline{v_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{w_n} = \alpha_n^1 \overline{v_1} + \alpha_n^2 \overline{v_2} + \ldots + \alpha_n^n \overline{v_n} \end{cases}$$

Interpretând vectorii $\overline{w_i}, i = 1,2,\ldots,n$ ca fiind efectul unui operator $f \in L(V)$ asupra vectorilor $\overline{v_i}, i = 1,2,\ldots,n$, adică $f(\overline{v_i}) = \alpha_i^j \overline{v_j} = \overline{w_i}, i = 1,2,\ldots,n$ rezultă că matricea de trecere $T_{BB'}$ este matricea lui f relativ la baza B, adică $A_B = T_{BB'}$. Cum $\det T_{BB'} \neq 0$ rezultă că f este un automorfism al lui V.

3.4. Matricea ataşată unei transformări liniare în baze diferite

Fie $A: X_n \to X_n$ o aplicaţie liniară şi $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ două baze din X_n.

Dacă $E = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$ şi $\overline{E} = \begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \vdots \\ \overline{e}_n \end{pmatrix}$, atunci

$$\overline{E} = C^T \cdot E$$

unde $C = [c_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$.

Avem $A(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, j = \overline{1,n}$ şi $A(\overline{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \overline{e}_i, j = \overline{1,n}$.

Dacă notez $\mathbf{A}(e) = A(e_j)$ şi $\mathbf{A}(\overline{e}) = A(\overline{e}_j)$, $\mathbf{A}(e) = \begin{pmatrix} A(e_1) \\ \vdots \\ A(e_n) \end{pmatrix}$,

$\mathbf{A}(\overline{e}) = \begin{pmatrix} A(\overline{e}_1) \\ \vdots \\ A(\overline{e}_n) \end{pmatrix}$ şi $\mathbf{A}(e) = A^T \cdot E$, $\mathbf{A}(\overline{e}) = \mathbf{B}^T \cdot \overline{E}$, unde $\mathbf{A}$ este matricea

Scanned with OKEN Scanner

ataşată transformării în baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ şi **B** este matricea ataşată transformării în baza $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$.

Astfel

$$\mathbf{A}(\bar{e}) = \mathbf{B}^T \cdot \bar{E} = \mathbf{B}^T \cdot C^T \cdot E$$

şi

$$\mathbf{A}(\bar{e}) = C^T A(e) = C^T \cdot \mathbf{A}^T E .$$

Rezultă

$$\mathbf{B}^T C^T = C^T \mathbf{A}^T E,$$

adică $\mathbf{B} = C^{-1}\mathbf{A}C$.

Se poate deci enunța următoarea propoziție :

Propoziția 3.4.1. *Matricea **B** a unei aplicații **A** în baza* $\bar{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ *se obține din matricea **A** a aplicației în baza* $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *după formula* $\mathbf{B} = C^{-1}\mathbf{A}C$, *unde C este matricea de trecere de la B la* $\bar{B}$.

Consecințe.

1. Fie transformarea liniară $A : X_n \to X_n$ cu

$$A(e_j) = a_{1j}e_1 + \ldots + a_{nj}e_n, \quad j = \overline{1,n} .$$

Atunci $A(e) = \mathbf{A}^T \cdot E$.

2. Dacă notăm cu $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea ce are pe coloane vectorii $A(e_1), \ldots, A(e_n)$ în raport cu baza $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$, obținem

$\bar{E} = \mathbf{A}^T E$, unde $E = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$ şi $\bar{E} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{pmatrix}$.

Dacă $x = \sum_{j=1}^{n} x^j e_j$ şi $y = \sum_{j=1}^{n} y^j e_j$, avem $A(x) = y$, adică

Scanned with OKEN Scanner

$$A\left(\sum_{j=1}^{n} x^j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x^j A(e_j) = x^1 A(e_1) + \ldots + x^n A(e_n)$$

$$= x^1(a_{11}e_1 + \ldots + a_{1n}e_n) + \ldots + x^n(a_{n1}e_1 + \ldots + a_{nn}e_n)$$

$$= (x^1 a_{11} + \ldots + x^n a_{n1})e_1 + \ldots + (x^1 a_{11} + \ldots + x^n a_{n1})e_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} y^j e_j = y^1 e_1 + \ldots + y^n e_n.$$

Prin identificare, obținem :

$$\begin{cases} y^1 = a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + \ldots + a_{1n}x^n \\ \vdots \\ y^n = a_{n1}x^1 + a_{n2}x^2 + \ldots + a_{nn}x^n \end{cases},$$

adică

$$Y = AX \text{, unde } Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \text{ şi } X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

3.5. Vectori şi valori proprii ai unui operator liniar

3.5.1. Subspații invariante. Vectori şi valori proprii

Fie V un spațiu liniar peste K, $\dim V = n$; vom folosi în continuare pentru $f \in L(V)$ denumirea de **operator liniar.** Ca orice aplicație liniară, un operator liniar este determinat dacă i se cunoaşte matricea relativ la o bază. Desigur că orice informații asupra operatorului respectiv sunt mai uşor de obținut calculatoric, dacă această matrice are o formă cât mai simplă (cu cât mai multe elemente egale cu $0 \in K$). Se pune deci firesc problema, dacă ne gândim la definiția matricei operatorului relativ la o bază , de a

Scanned with OKEN Scanner

stabili dacă există în V baze relativ la care matricea sa să fie cât mai simplă.

Definiția 3.5.1.1. *Un subspațiu liniar* $S \subset V$ *se numește* ***invariant*** *la acțiunea operatorului* $f \in L(V)$, *dacă* $\forall \bar{v} \in S, f(\bar{v}) \in S$ *(adică* $f(S) \subset S$*).*

Observație. Fie $S \subset V$ un subspațiu invariant la acțiunea operatorului $f \in L(V)$ și $B = \{\overline{u_i}\}_m$ o bază a sa. Să completăm această bază ca o bază în V: $B' = \{\overline{u_i}\}_m \cup \{\overline{v_j}\}_{n-m}$. Construind matricea lui f relativ la baza B' și notând $f(\overline{u_i}) = \alpha_i^k \overline{u_k}, f(\overline{v_j}) = \beta_j^k \overline{u_k} + \gamma_j^l \overline{v_l}, k = 1,...,m; l = 1,...,n-m$ să observăm că aceasta este de forma:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_m^1 & \beta_1^1 & \dots & \beta_{n-m}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^m & \dots & \alpha_m^m & \beta_1^m & \dots & \beta_{n-m}^m \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_1^1 & \dots & \gamma_{n-m}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_1^{n-m} & \dots & \gamma_{n-m}^{n-m} \end{bmatrix}$$

adică ea conține $m \cdot (n-m)$ elemente egale cu $0 \in K$. Deducem de aici importanța unui subspațiu invariant la $f \in L(V)$. Rămâne de stabilit în ce condiții astfel de subspații există, cum se determină ele și cum se utilizează pentru construcția unei baze în care matricea lui f să fie cât mai simplă.

Definiția 3.5.1.2. *Un vector nenul* $\bar{v} \in V$ *se numește* ***vector propriu*** *al operatorului liniar* $f \in L(V)$ *dacă există* $\lambda \in K$ *astfel încât* $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$. *Scalarul* $\lambda \in K$ *se numește* ***valoare proprie*** *corespunzătoare vectorului propriu* $\bar{v} \in V$.

Observație. Dacă $\bar{v} = \overline{0_V}$, atunci $f(\overline{0_V}) = \lambda \overline{0_V}, \forall \lambda \in K$.

Scanned with OKEN Scanner

Următoarea afirmație justifică necesitatea introducerii noțiunii de vector propriu al unui operator liniar.

Propoziția 3.5.1.1. *Mulțimea* S_{λ_0} *a vectorilor proprii ai operatorului* $f \in L(V)$ *la care se adaugă vectorul* $\overline{0_V}$ *este un subspațiu liniar al lui* V *și acest subspațiu liniar este invariant la acțiunea lui* f.

Demonstrație. $\forall \alpha, \beta \in K$ și $\forall \overline{v_1}, \overline{v_2} \in S_{\lambda_0}$ rezultă că $\alpha\overline{v_1} + \beta\overline{v_2} \in S_{\lambda_0}$ deoarece :

$$f(\alpha\overline{v_1} + \beta\overline{v_2}) = \alpha f(\overline{v_1}) + \beta f(\overline{v_2}) = \alpha(\lambda_0 \overline{v_1}) + \beta(\lambda_0 \overline{v_2}) = \lambda_0(\alpha\overline{v_1} + \beta\overline{v_2}).$$

S_{λ_0} este invariant la acțiunea lui f căci: $\forall \overline{w} \in f(S_{\lambda_0}), \exists \overline{v} \in f(S_{\lambda_0})$ astfel încât $f(\overline{v}) = \overline{w}$; dar $\overline{v} \in S_{\lambda_0}$, deci $f(\overline{v}) = \lambda_0 \overline{v}$ și $f(\overline{w}) = f(\lambda_0 \overline{v}) = \lambda_0 f(\overline{v}) = \lambda_0 \overline{w}$, adică $\overline{w} \in S_{\lambda_0}$ și $f(S_{\lambda_0}) \subset S_{\lambda_0}$.

Observație. Pentru simplitatea prezentării vom folosi pentru S_{λ_0} denumirea de **subspațiu propriu** corespunzător lui λ_0.

Să stabilim în continuare cum se determină, dacă există, vectorii și valorile proprii pentru $f \in L(V)$. Fie $B = \{\overline{v_i}\}_n$ o bază în V, A matricea lui f relativ la această bază și X_B matricea coloană alcătuită cu coordonatele în baza B ale vectorului propriu necunoscut, corespunzător valorii proprii necunoscute $\lambda \in K$. Din definiția 6.5.1.2 deducem atunci, folosind formula matriceală de calcul a imaginii unui vector printr-o aplicație liniară, că necunoscutele precizate satisfac ecuația matriceală

$$AX_B = \lambda X_B$$

sau

$$(A - \lambda I_n)X_B = 0$$

care reprezintă evident un sistem liniar și omogen cu necunoscutele coordonatele în baza B ale vectorului $\overline{v}$. Pentru a avea și soluții nenule $(\overline{v} \neq \overline{0_V})$ condiția necesară și suficientă este ca

$$\det(A - \lambda I_n) = 0 \qquad (3.5.1.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluțiile $\lambda \in K$ ale acestei ecuații sunt evident valorile proprii pentru $f \in L(V)$. Pentru fiecare $\lambda_0 \in K$ soluție a ecuației (3.5.1.1), vectorii proprii corespunzători se determină, găsind coordonatele lor în baza B ca soluții ale sistemului

$$(A - \lambda_0 I_n)X_B = 0 \qquad (3.5.1.2)$$

Evident, se pune problema dacă rezultatele astfel obținute se schimbă în cazul în care baza B este schimbată cu o altă bază.

Răspunsul la această problemă este negativ întrucât, înlocuind baza B cu o bază B', notând cu A' matricea lui f corespunzătoare acesteia şi repetând raționamentul de mai sus, am obține în locul ecuației (4.5.1.1) ecuația

$$\det(A' - \lambda I_n) = 0 \qquad (3.5.1.1')$$

şi

$$\det(A' - \lambda I_n) = \det(T_{BB'}^{-1} A T_{BB'} - \lambda T_{BB'}^{-1} I T_{BB'}) = \det[T_{BB'}^{-1}(A - \lambda I_n)T_{BB'}]$$

$$= \det T_{BB'}^{-1} \cdot \det(A - \lambda I_n) \cdot \det T_{BB'} = \det(A - \lambda I_n)$$

deoarece $\det T_{BB'}^{-1} \cdot \det T_{BB'} = 1$. Cu aceste precizări putem enunța:

Definiția 3.5.1.3. *Fie $f \in L(V)$ şi A matricea sa în baza B. Polinomul $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ se numeşte* ***polinomul caracteristic*** *al lui f iar ecuația $\det(A - \lambda I_n) = 0$ se numeşte* ***ecuația caracteristică*** *a lui f.*

Observație. Dacă $\dim V = n$ polinomul caracteristic al lui $f \in L(V)$ este un polinom de grad n. Acest polinom poate avea sau nu rădăcini din K. De exemplu, dacă K=R atunci este posibil ca polinomul caracteristic să nu aibă nici o soluție reală iar dacă K=C, teorema Gauss-d'Alembert garantează existența a chiar n rădăcini complexe.

Scanned with OKEN Scanner

3.5.2. Proprietăți ale vectorilor și valorilor proprii

Propoziția 3.5.2.1. *Fie* $S \subset V$ *un subspațiu liniar unidimensional invariant la acțiunea operatorului* $f \in L(V)$. *Atunci* S *este alcătuit numai din vectori proprii corespunzători unei anumite valori proprii la care se adaugă vectorul nul* $\overline{0_V}$.

Demonstrație. Fie $B = \{\bar{v}\}$ o bază în S; atunci $S = \{\alpha\bar{v} \mid \alpha \in K\}$; cum S este invariant la acțiunea lui S deducem că $\forall \bar{w} \in S, f(\bar{w}) \in S$ adică $\exists \beta \in K : f(\bar{w}) = \beta\bar{v}$.

Să presupunem că $\bar{w} \neq \overline{0_V}$ și să arătăm că $\bar{v}$ este vector propriu pentru f. Cum $\bar{w} \in S, \exists \alpha \in K, \alpha \neq 0$ astfel încât $\bar{w} = \alpha\bar{v}$.

Deci $f(\bar{w}) = \alpha f(\bar{v})$, adică $\beta\bar{v} = \alpha f(\bar{v})$, sau,deoarece $\alpha \neq 0$:

$$f(\bar{v}) = (\alpha^{-1}\beta)\bar{v}.$$

Notând $\lambda_0 = \alpha^{-1}\beta$ vom arăta că $\forall x \in S, \bar{x} \neq \overline{0_V}$ el este un vector propriu al lui f corespunzător valorii proprii λ_0.

Dacă $x \in S \setminus \{\overline{0_V}\}, \exists \gamma \neq 0, \gamma \in K : \bar{x} = \gamma\bar{v}$ deci ,

$$f(\bar{x}) = \gamma f(\bar{v}) = (\gamma\lambda_0)\bar{v} = \lambda_0(\gamma\bar{v}) = \lambda_0\bar{x}.$$

Propoziția 3.5.2.2. *Fie* $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ *două valori proprii distincte și* S_{λ_1} *respectiv* S_{λ_2} *subspațiile liniare de vectori proprii corespunzători la care se adaugă vectorul* $\overline{0_V}$. *Atunci* $S_{\lambda_1} \cap S_{\lambda_2} = \{\overline{0_V}\}$.

Demonstrație. Să presupunem contrariul, că $\exists \bar{v} \neq \overline{0_V}, \bar{v} \in S_{\lambda_1} \cap S_{\lambda_2}$. Atunci $f(\bar{v}) = \lambda_1\bar{v}$ și $f(\bar{v}) = \lambda_2\bar{v}$ adică $(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{v} = \overline{0_V}$, dar $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, deci $\exists(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}$ și atunci $\bar{v} = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}\overline{0_V}$ adică $\bar{v} = \overline{0_V}$, absurd.

Propoziția 3.5.2.3. *Fie* $\lambda_0 \in K$ *o valoare proprie a operatorului* $f \in L(V)$, *rădăcină multiplă de ordin* m_0 *a ecuației sale caracteristice. Atunci* S_{λ_0}, *subspațiul propriu corespunzător*

Scanned with OKEN Scanner

valorii proprii λ_0 *are dimensiunea* d_0 *mai mare sau cel mult egală cu* m_0.

Demonstrație. Fie $B_0 = \{\overline{u_k}\}_{d_0}$ o bază în S_{λ_0}; completăm această bază la o bază $B = \{\overline{u_i}\}_n$ în V şi construim matricea A a operatorului $f \in L(V)$ relativ la această bază. Deoarece:

$$\begin{aligned}
f(\overline{u_1}) &= \lambda_0 \overline{u_1} \\
f(\overline{u_2}) &= \lambda_0 \overline{u_2} \\
\ldots \quad &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
f(\overline{u_{d_0}}) &= \lambda_0 \overline{u_{d_0}} \\
f(\overline{u_j}) &= \alpha_j^k \overline{u_k} \qquad j = d_0 + 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

Matricea lui f relativ la baza B este:

$$A_B = \begin{bmatrix}
\lambda_0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{d_0+1}^1 & \ldots & \alpha_{n-d_0}^1 \\
0 & \lambda_0 & \ldots & 0 & \alpha_{d_0+1}^2 & \ldots & \alpha_{n-d_0}^2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & \lambda_0 & \alpha_{d_0+1}^{d_0} & \ldots & \alpha_{n-d_0}^{d_0} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{d_0+1}^{d_0+1} & \ldots & \alpha_{n-d_0}^{d_0+1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{d_0+1}^{n} & \ldots & \alpha_{n-d_0}^{n}
\end{bmatrix}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{d_0 \text{ coloane}}$

Din ipoteză, polinomul caracteristic al lui f, $P(\lambda)$, are λ_0 ca rădăcină de ordinul m_0:

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{m_0} Q(\lambda), Q(\lambda_0) \neq 0.$$

Pe de altă parte, acest polinom construit cu ajutorul matricii A_B este:

$$P(\lambda) = \det(A_B - \lambda I_n) = (\lambda_0 - \lambda)^{d_0} S(\lambda).$$

Scanned with OKEN Scanner

Comparând cele două scrieri ale polinomului caracteristic rezultă că $d_0 \le m_0$. Evident că $d_0 \ge 1$ căci S_{λ_0} conține și vectori nenuli.

Propoziția 3.5.2.4. *Vectorii proprii* $\overline{v_1},...,\overline{v_p}$ *ai operatorului* $f \in L(V)$ *corespunzători valorilor proprii* $\lambda_1,...,\lambda_p$ *distincte sunt liniar independenți.*

Demonstrație. Vom face demonstrația afirmației prin inducție după p, numărul vectorilor. Dacă $p = 1$, $\overline{v_1}$ este liniar independent, căci $\overline{v_1} \neq \overline{0_V}$.

Să presupunem că p-1 dintre vectorii dați sunt liniar independenți, de exemplu $\overline{v_1},...,\overline{v_{p-1}}$.

Să demonstrăm că $\overline{v_1},...,\overline{v_{p-1}},\overline{v_p}$ sunt liniar independenți.

Să presupunem că ei sunt liniar dependenți. Atunci există o combinație liniară a lor ce este vectorul $\overline{0_V}$, combinație în care cel puțin unul din scalarii combinației este nenul:

$$\alpha_1\overline{v_1}+...+\alpha_p\overline{v_p}=\overline{0_V} \qquad (3.5.1.1)$$

$\alpha_p \neq 0$, căci contrar, dacă $\alpha_p = 0$ rezultă $\alpha_1\overline{v_1}+...+\alpha_{p-1}\overline{v_{p-1}}=\overline{0_V}$ și din ipoteza inducției deducem că și $\alpha_i = 0$ cu $i = 1,2,...,p-1$ absurd.

Aplicând $f \in L(V)$ relației (6.5.1.1), rezultă că

$$\alpha_1(\lambda_1\overline{v_1})+...+\alpha_p(\lambda_p\overline{v_p})=\overline{0_V} \qquad (3.5.1.2)$$

$\alpha_p \neq 0$, căci contrar, (6.5.1.2) se reduce la

$$(\alpha_1\lambda_1)\overline{v_1}+...+(\alpha_{p-1}\lambda_{p-1})\overline{v_{p-1}}=\overline{0_V}$$

și din ipoteza inducției deducem că $\alpha_i\lambda_i = 0, i = 1,2,...,p-1$;cum în (65.1.1) este posibil să mai existe $\alpha_{i_0} \neq 0$, din $\alpha_{i_0}\lambda_{i_0} = 0, \lambda_{i_0} = 0$, absurd,căci λ_p, λ_{i_0} ar fi valori proprii egale. Înmulțind (3.5.1.1) cu $\alpha_p \neq 0$ și scăzând (3.5.1.2) din (3.5.1.1) deducem:

$$\alpha_1(\lambda_p-\lambda_1)\overline{v_1}+...+\alpha_{p-1}(\lambda_p-\lambda_{p-1})\overline{v_{p-1}}=\overline{0_V};$$

Scanned with OKEN Scanner

din ipoteza inducției rezultă că $\alpha_i(\lambda_p - \lambda_i) = 0$ ca mai sus, din $\alpha_{i_0} \neq 0$ deducem că $\lambda_p - \lambda_{i_0} = 0$ adică $\lambda_p = \lambda_{i_0}$, absurd, deci $\overline{v_1},...,\overline{v_p}$ sunt liniar independenți.

Observație. În următoarea secțiune aceste proprietăți ale vectorilor şi valorilor proprii vor fi utilizate pentru a motiva în ce condiții există pentru operatorul $f \in L(V)$ o bază relativ la care matricea lui f să aibă o formă simplă şi anume să fie o matrice diagonală. În caz că o astfel de bază există în V, se va preciza cum poate fi ea construită.

3.6. Urma unei matrice. Matrice asemenea. Matrice simetrice. Teorema Hamilton – Cayley

Fie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ valori proprii ale matricei $A \in M_n(K)$

Definim **urma** matricei A prin $\text{tr } A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Definiția 3.6.1. Două matrice A si B din $M_n(K)$ se numesc **asemenea** dacă există o altă matrice nesingulară C, astfel încât:

$$B = C^{-1} A C$$

şi se notează $A \sim B$.

Definiția 3.6.2. *O matrice $A \in M_n(K)$ se numeşte **simetrică** dacă $A = A^t$, unde A^t este transpusa matricei A.*

Definiția 3.6.3. *$A \in M_n(K)$ se numeşte **ortogonală** dacă*

$$A \cdot A^t = O_n.$$

Proprietatea 3.6.1.

p_1) Dacă $A \sim B$, atunci A şi B au aceleaşi valori proprii.

P_2) Dacă matricea A este simetrică, reală, atunci valorile ei proprii sunt reale.

p_3) Dacă A este reală şi ortogonală atunci modulul tuturor valorilor proprii este egal cu unu.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație.

p_1) Din A~B rezultă că există o matrice C nesingulară astfel ca $B = C^{-1} A C$.

$$\begin{aligned}\det(B-\lambda I_n) &= \det(C^{-1}AC-\lambda I_n)\\ &= \det(C^{-1}AC-C^{-1}\lambda I_n C)\\ &= \det(C^{-1}(AC-\lambda I_n C))\\ &= \det(C^{-1}(A-\lambda I_n)C)\\ &= \det(A-\lambda I_n).\end{aligned}$$

Rezultă că A şi B au aceleaşi valori proprii.

p_2) Pentru $AX = \lambda X$, aplicăm conjugata şi rezultă:

$$\overline{A}\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}.$$

Cum A este reală, obținem $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$.

Astfel $AX = \lambda X$ şi $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$.

Înmulțim egalitățile cu $\overline{X}^t \neq 0$ la stânga, respectiv cu X^t:

$$\overline{X}^t AX = X^t \lambda X$$

şi

$$X^t A\,\overline{X} = X^t\,\overline{\lambda}\,\overline{X}.$$

Rezultă $X^t \lambda\,\overline{X} = X^t\,\overline{\lambda}\,\overline{X}$, adică $X^t\,\overline{X}(\lambda - \overline{\lambda}) = 0$, de unde $\lambda = \overline{\lambda}$.

Astfel am arătat că valorile proprii sunt reale.

p_3) Fie $\lambda \in \mathbf{C}$ valoare proprie. $\langle Ax|Ax\rangle = \langle \lambda x|\lambda x\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle x|x\rangle$ şi $\langle Ax|Ax\rangle = \langle x|x\rangle$. Atunci $\lambda\overline{\lambda} = 1$, adică $|\lambda| = 1$.

Teorema Hamilton – Cayley. *Dacă $A \in M_n(K)$ atunci ea satisface ecuația caracteristică, adică $P_n(A) = 0$.*

Exemplu. Folosind teorema Hamilton – Cayley, să se calculeze A^{-1} şi A^n pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. $P(A) = A^2 - 2A + I_2 = 0$.

Rezultă $I_2 = 2A - A^2$ adică $I_2 = (2I_2 - A)A$ şi înmulțind la dreapta cu A^{-1} obținem $A^{-1} = 2I_2 - A$.

Pentru calculul lui A^n, găsim $A^2 = I_2 - 2A$, ş.a.m.d., $A^n = nA - (n-1)I_2$.

3.7. Diagonalizarea endomorfismelor

Fie $A: X_n \to X_n$ un endomorfism arbitrar, unde $\dim X_n = n$.

În multe probleme, ne interesează să alegem o bază în X_n astfel încât matricea endomorfismului să fie diagonală.

Definiția 3.7.1. Un endomorfism $A: X_n \to X_n$ este **diagonalizabil** dacă există o bază $B = \{e_1, ..., e_n\}$ astfel încât matricea lui în această bază să fie diagonală.

Teorema 3.7.1. *Un endomorfism $A : X_n \to X_n$ este diagonalizabil dacă există o bază a spațiului X_n formată din vectorii proprii ai endomorfismului.*

Demonstrație. Din faptul că A este diagonalizabil rezultă că există o bază $B = \{e_1, ..., e_n\}$ astfel încât

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Avem $A(e_i) = a_{ii}e_i$, $i = \overline{1,n}$, adică vectorii e_i, $i = \overline{1,n}$ sunt vectori proprii ai endomorfismului A.

Reciproc, considerăm $\{x_1, ..., x_n\}$ o bază formată din vectorii proprii ai lui X_n. Rezultă

$$A(x_i) = \lambda_i x_i, \; i = \overline{1,n},$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Deoarece matricile ataşate unui endomorfism în baze diferite sunt asemenea, între matricea A în baza oarecare B şi matricea D în baza $\{x_1,...,x_n\}$ există relaţia $D = C^{-1} A C$, unde C reprezintă matricea de trecere de la o bază la alta.

Definiţia 3.7.2. *Matricea A este* ***diagonală*** *dacă există o matrice C nesingulară astfel încât* $D = C^{-1} A C$.

Dimensiunea unui subspaţiu propriu corespunzător endomorfismului $A : X_n \to X_n$ este mică sau cel mult egală cu ordinul de multiplicitate al valorilor proprii corespunzătoare.

Teorema 3.7.2. *$A : X_n \to X_n$ este diagonalizabil dacă şi numai dacă polinomul caracteristic $P(\lambda)$ are toate rădăcinile în K peste care se consideră X_n şi dimensiunea fiecărui subspaţiu propriu este egală cu ordinul de multiplicitate al valorilor proprii.*

Algoritmul diagonalizării se poate prezenta astfel:

1) Aflăm valorile proprii care sunt soluţii în K ale ecuaţiei $P(\lambda)=0$
2) Determinăm vectorii proprii, rezolvând sistemele $(A-\lambda_i I_n)X=0$
3) Scriem matricea diagonală D ce va avea pe diagonala principală valorile proprii, de câte ori este ordinul de multiplicitate.

Exemplu. Fie A: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definit de ecuaţiile

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + 2x^2 \\ y^2 = \quad 2x^2 \\ y^3 = -2x^2 + x^3 \end{cases}$$

a) Să se găsească valorile proprii.
b) Să se găsească vectorii proprii.
c) Să se găsească subspaţiile proprii.
d) Să se afle dimensiunea fiecărui subspaţiu propriu.
e) Să se precizeze dacă poate fi diagonalizabil.

Scanned with OKEN Scanner

f) Să se determine matricea diagonală D.

g) Care este baza în raport cu care poate fi diagonalizabil.
h) Să se afle matricea diagonalizatoare.

Soluție.

a) Matricea A este

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

iar valorile proprii $\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=2.$

b) Vectorii proprii sunt $v_1=(1,0,0),\ v_2=(0,0,1),\ v_3=(2,1,-2).$

c) $S_1=\{\alpha(1,0,0)+\beta(0,0,1)|\alpha,\beta\in\mathbf{R}\},\ S_2=\{\gamma(2,1,-2)|\gamma\in\mathbf{R}\}.$

d) $\dim S_1=2,\ \dim S_2=1.$

e) Dimensiunea subspațiilor este egală cu ordinul de multiplicitate al valorilor proprii, deci rezultă conform **Teoremei 3.7.2.** că A este diagonalizabil.

f) $$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

g) $e_1=(1,0,0)=x_1,\quad e_2=(0,0,1)=x_2,$
$e_3=(2,1,-2)=x_3,\ B=\{x_1,x_2,x_3\}.$

i) $$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.8. Forma Jordan

În cazul în care nu putem determina o bază în raport cu care matricea transformată să aibă forma diagonală, se va putea determina o bază în anumite condiții, în care matricea să aibă **forma Jordan** dacă ecuația caracteristică are toate rădăcinile din K.

Definiția 3.8.1. *Endomorfismul $A: X_n \to X_n$ este adus la **forma Jordan (este jordanizabil)**, dacă există o bază a sa astfel încât matricea endomorfismului A să aibă forma*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_n \end{pmatrix}$$

unde

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,s},$$

se numesc **celule Jordan** iar λ_i sunt valorile proprii şi s este ordinul de multiplicitate al rădăcinilor.

Există endomorfisme reale care nu pot fi aduse la forma Jordan, acelea pentru care ecuația caracteristică nu are toate rădăcinile în **R**.

Teorema 3.8.1. (Jordan). *Dacă endomorfismul $A: X_n \to X_n$ are suma multiplicităților valorilor proprii din K egală cu n, atunci există o bază în X_n față de care matricea lui A are forma Jordan.*

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Să se aducă la forma Jordan matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluție. $P(\lambda) = 0$ implică $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

Matricea A nu poate fi adusă la forma diagonală deoarece ordinul de multiplicitate al valorilor proprii (4) nu este egal cu dimensiunea subspațiului propriu.

$$S_1 = \{\lambda(1,0,0) | \lambda \in \mathbf{R}\}, \dim S_1 = 1.$$

Se obține matricea de trecere:

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

iar

$$J = C^{-1}AC$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4. SPAȚII VECTORIALE EUCLIDIENE. ANALIZA STRUCTURII AGENȚILOR ECONOMICI

4.1. Produs scalar pe un spațiu vectorial.

4.1.1. Definiția produsului scalar. Exemple

Definiția 4.1.1.1. *Fie V un spațiu vectorial real. O aplicație $g: V \times V \to R$, biliniară, simetrică şi pozitiv definită se numeşte* ***produs scalar*** *pe V.*

Din capitolul precedent rezultă că un produs scalar g pe spațiul vectorial real V verifică condițiile:

(PS_1) $g(\overline{v_1} + \overline{v_2}, \overline{w}) = g(\overline{v_1}, \overline{w}) + g(\overline{v_2}, \overline{w})$ şi $g(\alpha\overline{v}, \overline{w}) = \alpha g(\overline{v}, \overline{w})$, $\forall \overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v}, \overline{w} \in V, \forall \alpha \in K$ (liniaritatea în primul argument);

(PS_2) $g(\overline{v}, \overline{w}) = g(\overline{w}, \overline{v})$, $\forall \overline{v}, \overline{w} \in V$ (simetria);

(PS_3) $g(\overline{v}, \overline{v}) \geq 0$ şi $g(\overline{v}, \overline{v}) = 0 \Leftrightarrow \overline{v} = \overline{0_V}$ (g este pozitiv definită).

Consecințe ale axiomelor $(PS_1) - (PS_3)$

1. Simetria aplicației $g: V \times V \to R$ şi liniaritatea în primul argument asigură şi liniaritatea în cel de-al doilea argument.

$$g(\overline{v}, \overline{w_1} + \overline{w_2}) = g(\overline{w_1} + \overline{w_2}, \overline{v}) = g(\overline{w_1}, \overline{v}) + g(\overline{w_2}, \overline{v}) = g(\overline{v}, \overline{w_1}) + g(\overline{v}, \overline{w_2}).$$

$$g(\overline{v}, \alpha\overline{w}) = g(\alpha\overline{w}, \overline{v}) = \alpha g(\overline{w}, \overline{v}) = \alpha g(\overline{v}, \overline{w}).$$

2. Aplicând succesiv axioma (PS_1) şi Consecința 1, se arată că:

$$g(\alpha^i \overline{v_i}, \overline{w}) = \alpha^i g(\overline{v_i}, \overline{w}), \ i = 1,2,...,k$$

şi $g(\overline{v}, \alpha^i \overline{w_i}) = \alpha^i g(\overline{v}, \overline{w_i})$, $i = 1,2,...,k$. Avem $g(\overline{v}, \overline{0}) = 0$

3. Pentru orice vector $\overline{v} \in V$, avem $g(\overline{v}, \overline{0}) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, luând $\bar{0} = 0 \cdot \bar{v}$ obținem $g(\bar{v}, \bar{0}) = g(\bar{v}, 0 \cdot \bar{v}) = 0 \cdot g(\bar{v}, \bar{v}) = 0$.

Definiția 4.1.1.2. *Un spațiu vectorial real V, de dimensiune finită înzestrat cu un produs scalar g, se numeşte* ***spațiu euclidian,*** *iar g se mai numeşte* ***tensor metric.***

Un spațiu vectorial real de dimensiune infinită, înzestrat cu un produs scalar, se numeşte **spațiu prehilbertian**.

Observație. Produsul scalar nu este o noțiune asociată numai spațiilor vectoriale reale ci şi complexe, de exemplu.

În cele ce urmează, vom nota un produs scalar pe spațiul vectorial real V cu $\langle , \rangle$, iar perechea $(V, \langle , \rangle)$ desemnează spațiul euclidian. Numărul $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$ este produsul scalar al vectorilor $\bar{v}, \bar{w} \in V$.

Exemple:

a) Spațiul euclidian standard $(R^n, \langle , \rangle)$ este definit de produsul scalar $\langle , \rangle : R^n \times R^n \to R$ dat prin $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$, oricare ar fi $\bar{v} = (x^1, x^2, ..., x^n) \in R^n$, $\bar{w} = (y^1, y^2, ..., y^n) \in R^n$.

b) Spațiul vectorial real $C[a,b]$ al funcțiilor continue pe intervalul $[a,b]$ este spațiu prehilbertian relativ la produsul sclar definit astfel:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx .$$

4.1.2. Expresia analitică a produsului scalar relativ la o bază din spațiul euclidian $(V, \langle , \rangle)$

Fie $(V, \langle , \rangle)$ un spațiu euclidian de dimensiune n şi $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ o bază în V. Din teoria aplicațiilor biliniare se ştie că matricea produsului scalar relativ la baza B este $G = (g_{ij})_{i,j=1,2,...,n}$ unde $g_{ij} = \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle$.

Scanned with OKEN Scanner

$$G=\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

Din condițiile (PS_1) şi (PS_3) rezultă că matricea G este simetrică, adică $g_{ij}=g_{ji},\forall i,j=1,2,..,n$ şi pozitiv definită, adică, conform Teoremei lui Sylvester toți determinanții Δ_i sunt pozitivi:

$$\Delta_1=g_{11}>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}>0,...,\Delta_n=\det G>0.$$

Dacă se cunoaşte matricea $G=(g_{ij})$ a produsului scalar relativ la baza B, atunci produsul scalar al vectorilor $\overline{v}=x^i\overline{e_i}$, $\overline{w}=y^j\overline{e_j}\in(V,\langle,\rangle)$ se calculează astfel:

$$\left\langle \overline{v},\overline{w}\right\rangle=\left\langle x^i\overline{e_i},y^j\overline{e_j}\right\rangle=x^iy^j\left\langle \overline{e_i},\overline{e_j}\right\rangle=x^iy^jg_{ij} \qquad (4.1.2.1)$$

sau, detaliat,

$$\left\langle \overline{v},\overline{w}\right\rangle=\begin{bmatrix} x^1 & x^2 & \cdots & x^n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} g_{ij} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix} \qquad (4.1.2.2)$$

Observație. Având fixată o bază $B=(\overline{e_i})_n$ în spațiul vectorial real V, orice matrice $G\in \mathrm{M}\ (n,R)$ simetrică şi pozitiv definită generează un produs scalar pe V şi anume produsul scalar care în baza B are matricea G şi deci este definit conform relației (4.1.2.2).

Exemplu

Matricea $G=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ generează pe spațiul vectorial R^2, raportat la baza canonică B, produsul scalar $g:R^2\times R^2\to R$ definit prin

Scanned with OKEN Scanner

$$g((x^1,x^2),(y^1,y^2))=\begin{bmatrix}x^1 & x^2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -1\\ -4 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y^1\\ y^2\end{bmatrix}=2x^1y^1-x^1y^2-4x^2y^1+6x^2y^2$$

Prin urmare, pe un spațiu vectorial se pot defini o infinitate de produse scalare.

4.1.3. Norma unui vector. Unghiul a doi vectori într-un spațiu euclidian

Fie $(V,\langle,\rangle)$ un spațiu euclidian şi $\bar{v}\in V$ un vector oarecare. Deoarece numărul $\langle\bar{v},\bar{v}\rangle\geq 0$, are sens radicalul $\sqrt{\langle\bar{v},\bar{v}\rangle}$.

Propoziția 4.1.3.1. *Într-un spațiu euclidian* $(V,\langle,\rangle)$ *are loc inegalitatea*

$$\left|\langle\bar{v},\bar{w}\rangle\right|\leq\sqrt{\langle\bar{v},\bar{v}\rangle}\cdot\sqrt{\langle\bar{w},\bar{w}\rangle} \qquad (4.1.3.1)$$

numită ***inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz.***

Demonstrație. Dacă cel puțin unul din cei doi vectori este vectorul nul $\overline{0_V}$, inegalitatea este evidentă.

Presupunem că vectorii $\bar{v},\bar{w}\neq\overline{0_V}$ şi considerăm funcția asociată lor, $f:R\to R$, definită prin $f(\lambda)=\langle\bar{v}+\lambda\bar{w},\bar{v}+\lambda\bar{w}\rangle,\forall\lambda\in R$. Produsul scalar fiind pozitiv definit, $f(\lambda)\geq 0,\forall\lambda\in R$. Dar cum $f(\lambda)=\langle\bar{v},\bar{v}\rangle+2\lambda\langle\bar{v},\bar{w}\rangle+\lambda^2\langle\bar{w},\bar{w}\rangle$, rezultă că f este o funcție de gradul doi în λ având coeficientul lui λ^2 pozitiv. Inegalitatea $f(\lambda)\geq 0,\forall\lambda\in R$ implică în acest caz $\Delta\leq 0$, unde $\Delta=\langle\bar{v},\bar{w}\rangle^2-\langle\bar{v},\bar{v}\rangle\langle\bar{w},\bar{w}\rangle$. Deci $\langle\bar{v},\bar{w}\rangle^2\leq\langle\bar{v},\bar{v}\rangle\langle\bar{w},\bar{w}\rangle$ sau, echivalent, $\left|\langle\bar{v},\bar{w}\rangle\right|\leq\sqrt{\langle\bar{v},\bar{v}\rangle}\cdot\sqrt{\langle\bar{w},\bar{w}\rangle}$.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 4.1.3.1. *Un spațiu vectorial real V se numește* ***spațiu normat,*** *dacă pe V este definită o funcție $\|\ \|: V \to R$ cu proprietățile:*

(N_1) $\|\bar{v}\| \geq 0$ *și* $\|\bar{v}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{v} = \overline{0_V}, \forall \bar{v} \in V$;

(N_2) $\|\bar{v} + \bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|, \forall \bar{v}, \bar{w} \in V$;

(N_3) $\|\alpha\bar{v}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{v}\|, \forall \alpha \in R, \overline{v \in V}$.

Funcția $\|\ \|: V \to R$ care îndeplinește condițiile (N_1)-(N_3) se numește **normă** pe V, iar numărul $\|\bar{v}\|$ este **norma vectorului** $\bar{v}$.

Propoziția 4.1.3.2. *Un spațiu euclidian $(V, \langle , \rangle)$ este un spațiu normat, având norma definită astfel:*

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle} \qquad (4.1.3.2)$$

Demonstrație. Să arătăm că funcția $\|\ \|: V \to R$ definită prin relația (1.3.2) verifică condițiile (N_1)-(N_3).

Evident, $\|\bar{v}\| \geq 0$. $\|\bar{v}\| = 0 \Leftrightarrow \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \bar{v} = \overline{0_V}$.

$$\|\bar{v} + \bar{w}\| = \sqrt{\langle \bar{v} + \bar{w}, \overline{v + w} \rangle} = (\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle + 2\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{w}, \bar{w} \rangle)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq (\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle + 2\sqrt{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \bar{w}, \bar{w} \rangle} + \langle \bar{w}, \bar{w} \rangle)^{\frac{1}{2}}.$$

Restrângând ultimul termen din inegalitatea obținută, avem

$$\|\bar{v} + \bar{w}\| \leq ((\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{w}, \bar{w} \rangle)^2)^{\frac{1}{2}},$$

adică

$$\|\bar{v} + \bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|.$$

Fie $\alpha \in R$. Atunci

$$\|\alpha\bar{v}\| = \sqrt{\langle \alpha\bar{v}, \alpha\bar{v} \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle} = |\alpha| \cdot \|\bar{v}\|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă în spaţiul euclidian $(V,\langle,\rangle)$ este fixată o bază $B=\{\overline{e_1},\overline{e_2},..,\overline{e_n}\}$ şi $\overline{v}=x^i\overline{e_i}\in V$ atunci norma vectorului $\overline{v}$

$$\left\|\overline{v}\right\|=\sqrt{\left\langle x^i\overline{e_i},x^j\overline{e_j}\right\rangle}=\sqrt{x^ix^jg_{ij}}$$

unde $g_{ij}=\left\langle\overline{e_i},\overline{e_j}\right\rangle$.

Observaţie. Într-un spaţiu euclidian $(V,\langle,\rangle)$ inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz se scrie cu ajutorul normei astfel:

$$\left|\left\langle\overline{v},\overline{w}\right\rangle\right|\le\left\|\overline{v}\right\|\cdot\left\|\overline{w}\right\|$$

sau, echivalent, $\left|\dfrac{\left\langle\overline{v},\overline{w}\right\rangle}{\left\|\overline{v}\right\|\cdot\left\|\overline{w}\right\|}\right|\le 1,\forall\overline{v},\overline{w}\ne\overline{0_V}$.

Faptul că pentru orice doi vectori $\overline{v},\overline{w}\in(V,\langle,\rangle),\overline{v},\overline{w}\ne\overline{0_V}$ avem

$$-1\le\frac{\left\langle\overline{v},\overline{w}\right\rangle}{\left\|\overline{v}\right\|\cdot\left\|\overline{w}\right\|}\le 1$$

ne asigură că există $\theta\in[0,\pi]$ astfel încât $\cos\theta=\dfrac{\left\langle\overline{v},\overline{w}\right\rangle}{\left\|\overline{v}\right\|\cdot\left\|\overline{w}\right\|}$.

Definiţia 4.1.3.2. *Într-un spaţiu euclidian* $(V,\langle,\rangle)$ ***numim măsura unghiului a doi vectori*** $\overline{v},\overline{w}$, *ca fiind soluţia* $\theta\in[0,\pi]$ *a ecuaţiei* $\cos\theta=\dfrac{\left\langle\overline{v},\overline{w}\right\rangle}{\left\|\overline{v}\right\|\cdot\left\|\overline{w}\right\|}$.

4.1.4. Versorul unei direcţii

În fizică, un vector considerat ca un segment orientat este caracterizat de direcţie, sens şi mărime.

În contextul abstract al unui spaţiu vectorial real oarecare, putem preciza doar direcţia şi sensul unui vector, în timp ce asocierea unui număr care să reprezinte mărimea (lungimea)

Scanned with OKEN Scanner

vectorului presupune o structură adiţională pe spaţiul vectorial respectiv. Această structură este definită de un tensor particular, de două ori covariant, numit **produs scalar** asociat spaţiului vectorial dat şi ea constituie obiectul de studiu al acestui capitol.

Fie V un spaţiu vectorial real. Doi vectori $\bar{v}, \bar{w} \in V$ sunt coliniari, $\bar{v} \| \bar{w}$, dacă există $\lambda \in R \setminus \{0\}$ astfel încât $\bar{w} = \lambda \bar{v}$. Relaţia de coliniaritate este o **relaţie de echivalenţă** şi **clasa da echivalenţă** a unui vector $\bar{v}$, notată $[\bar{v}]$ se numeşte **direcţia** vectorului $\bar{v}$.

$$[\bar{v}] = \{\bar{w} \in V \mid \exists \lambda \in R \setminus \{0\} \text{ astfel încât } \bar{w} = \lambda \bar{v}\}.$$

În cadrul aceleiaşi direcţii $[\bar{v}]$ definim două sensuri, astfel: fixăm un vector $\bar{u}$, $\bar{u} \in [\bar{v}]$ din direcţia lui $\bar{v}$ şi, definim **sensul pozitiv** în direcţia respectivă ca fiind subclasa

$$[\bar{v}]_+ = \{\bar{w} \in V \mid \exists \lambda > 0 \text{ astfel încât } \bar{w} = \lambda \bar{u}\},$$

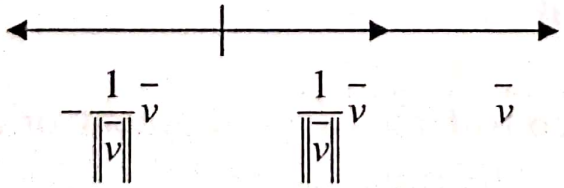
iar **sensul negativ** ca fiind

$$[\bar{v}]_- = \{\bar{w} \in V \mid \exists \lambda < 0 \text{ astfel încât } \bar{w} = \lambda \bar{u}\}.$$

Precizăm că alegerea sensului pozitiv este subiectivă.

Definiţia 4.1.4.1. Numim **versor** al unei direcţii dintr-un spaţiu euclidian, un vector din direcţia respectivă având norma egală cu 1.

Observaţie. Orice direcţie într-un spaţiu euclidian are doi versori şi anume, dacă direcţia este reprezentată de vectorul $\bar{v}$, atunci vectorii $\frac{1}{\|\bar{v}\|}\bar{v}$ şi $-\frac{1}{\|\bar{v}\|}\bar{v}$ sunt coliniari cu $\bar{v}$ şi au evident norma egală cu 1.



Versorii unei direcţii nu depind de vectorul $\bar{v}$ ales din direcţia respectivă ci numai de sensul lui $\bar{v}$.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, dacă $\bar{w}$ este coliniar cu $\bar{v}$, adică există $\lambda_0 \neq 0$ astfel încât $\bar{w} = \lambda_0 \bar{v}$, atunci $\frac{1}{\|\bar{w}\|}\bar{w} = \frac{1}{|\lambda_0| \cdot \|\bar{v}\|}\lambda_0 \bar{v} = \varepsilon \frac{1}{\|\bar{v}\|}\bar{v}$ unde $\varepsilon = 1$ dacă $\bar{v}$ şi $\bar{w}$ au acelaşi sens $(\lambda_0 > 0)$ şi $\varepsilon = -1$ dacă $\bar{v}$ şi $\bar{w}$ au sensuri opuse $(\lambda_0 < 0)$.

În cele ce urmează, pentru un vector $\bar{v} \in (V, \langle , \rangle)$ notăm prin $v^0 = \frac{1}{\|\bar{v}\|}\bar{v}$, versorul direcţiei lui $\bar{v}$, având acelaşi sens cu $\bar{v}$.

Exemplu

Fie în spaţiul euclidian standard $(R^3, \langle , \rangle)$ vectorul $\bar{v} = (1,-2,0)$. Versorul asociat $\overline{v^0} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)$.

Vectorul $\bar{w} = (-3,6,0)$ are aceiaşi direcţie cu $\bar{v}$, dar sens opus pentru că $\bar{w} = -3\bar{v}$, $\overline{w^0} = \frac{1}{\sqrt{45}}(3,-6,0) = -\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0) = -\overline{v^0}$.

4.1.5. Sisteme ortogonale de vectori. Baze ortonormate

Fie $(V, \langle , \rangle)$ un spaţiu euclidian, $\bar{v}$, $\bar{w}$ doi vectori din V şi θ măsura unghiului dintre cei doi vectori. Dacă $\cos\theta = 0$, atunci $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dar cum $\cos\theta = \frac{\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle}{\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\|}$, rezultă că $\theta = \frac{\pi}{2}$ dacă şi numai dacă $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0$.

Aceasta ne permite să dăm

Definiţia 4.1.5.1. *Într-un spaţiu euclidian $(V, \langle , \rangle)$ doi vectori se numesc* ***vectori ortogonali,*** *dacă produsul lor scalar este zero.*

Dacă $\bar{v}$ şi $\bar{w}$ sunt ortogonali scriem $\bar{v} \perp \bar{w}$.

Definiţia 4.1.5.2. *Un sistem de vectori $S = \{\bar{v}_i\}_{i \in I}$ din spaţiul euclidian $(V, \langle , \rangle)$ se numeşte* ***sistem ortogonal,*** *dacă oricare doi vectori distincţi din S sunt ortogonali.*

Scanned with OKEN Scanner

Propoziția 4.1.5.1. *Fie V un spațiu vectorial (finit sau infinit dimensional) înzestrat cu produsul scalar $\langle,\rangle$. Orice sistem ortogonal din V, care nu conține vectorul nul este un sistem liniar independent.*

Demonstrație. a) Presupunem că sistemul S este un sistem ortogonal finit

$$S = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_m}\}.$$

Fie $\lambda_j \in R, j = 1,2,...,m$ astfel încât:

$$\lambda_1 \overline{v_1} + \lambda_2 \overline{v_2} + ... + \lambda_m \overline{v_m} = 0 \qquad (4.1.5.1)$$

Înmulțim scalar fiecare membru din egalitatea (1.5.1) cu vectorul $\overline{v_k} \in S$ şi obținem:

$$\lambda_1 \langle \overline{v_1}, \overline{v_k} \rangle + \lambda_2 \langle \overline{v_2}, \overline{v_k} \rangle + ... + \lambda_k \langle \overline{v_k}, \overline{v_k} \rangle + ... + \lambda_m \langle \overline{v_m}, \overline{v_k} \rangle = 0$$

Cum $\langle \overline{v_i}, \overline{v_k} \rangle = 0, \forall i \neq k$ rezultă că $\lambda_k \langle \overline{v_k}, \overline{v_k} \rangle = 0$ şi deci $\lambda_k = 0$ (pentru că $\langle \overline{v_k}, \overline{v_k} \rangle > 0$).

Deoarece vectorul $\overline{v_k} \in S$ a fost arbitrar ales, $k \in \{1,2,...,m\}$ rezultă că $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, ..., \lambda_m = 0$, adică sistemul S este liniar independent.

b) Dacă sistemul S conține o infinitate de vectori, se ştie că un asemenea sistem este liniar independent, dacă orice subsistem finit al său este liniar independent. Ținând cont de a), orice subsistem finit al lui S fiind ortogonal este liniar independent şi prin urmare sistemul S este liniar independent.

Definiția 4.1.5.2. *Fie $(V, \langle,\rangle)$ un spațiu euclidian de dimensiune n şi $B = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}\}$ o bază în V. Baza B se numeşte* ***bază ortonormată,*** *dacă B este un sistem ortogonal şi fiecare vector are norma egală cu 1, adică*

$$\langle \overline{e_i}, \overline{e_j} \rangle = \delta_i^j = \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = j \\ 0, \text{ dacă } i \neq j \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu

Baza canonică B din spațiul euclidian standard $(R^n,\langle,\rangle)$ este o bază ortonormată.

Ne punem următoarea întrebare: **Într-un spațiu euclidian există o bază ortonormată?** Răspunsul este dat de:

Teorema lui Schmidt (de ortogonalizare a unei baze date). *Oricărei baze* $B=\{\overline{u_1},\overline{u_2},...,\overline{u_n}\}$ *din spațiul euclidian* $(V,\langle,\rangle)$ *i se asociază o bază ortonormată* $B'=\{\overline{e_1},\overline{e_2},...,\overline{e_n}\}$.

Demonstrație. Mai întâi, prin procedeul de ortogonalizare al lui Schmidt cu ajutorul vectorilor bazei date construim o bază ortogonală și apoi versorii vectorilor din această bază vor constitui baza ortonormată B'.

Construcția vectorilor ortogonali se face progresiv.

Fie $\overline{v_1}=\overline{u_1}$ și $\overline{v_2}=\lambda_2^1\overline{v_1}+\overline{u_2},\lambda_2^1\in R$. Determinăm scalarul λ_2^1 din condiția ca $\overline{v_2}\perp\overline{v_1}$ adică $0=\langle\overline{v_2},\overline{v_1}\rangle=\lambda_2^1\langle\overline{u_1},\overline{u_1}\rangle+\langle\overline{u_2},\overline{u_1}\rangle$. Rezultă că

$$\lambda_2^1=-\frac{\langle\overline{u_2},\overline{u_1}\rangle}{\langle\overline{u_1},\overline{u_1}\rangle}$$

și cum $\overline{u_1}\neq\overline{0}$, $\overline{u_2}\neq\overline{0}$ și $\overline{v_1},\overline{v_2}\neq\overline{0}$, sistemul $\{\overline{v_1},\overline{v_2}\}$ este ortogonal și liniar indpendent.

Construim apoi vectorul

$$\overline{v_3}=\lambda_3^1\overline{v_1}+\lambda_3^2\overline{v_2}+\overline{u_3}$$

unde λ_3^1,λ_3^2 se determină din condițiile

$$\langle\overline{v_3},\overline{v_1}\rangle=0 \text{ și } \langle\overline{v_3},\overline{v_2}\rangle=0.$$

Obținem

$$\lambda_3^1=-\frac{\langle\overline{v_1},\overline{u_3}\rangle}{\|\overline{v_1}\|^2} \text{ și } \lambda_3^2=-\frac{\langle\overline{v_2},\overline{u_3}\rangle}{\|\overline{v_2}\|^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem că după acelaşi principiu a fost construit sistemul ortogonal $S=\{\overline{v_1},\overline{v_2},...,\overline{v_p}\}, p\le n-1$ care (evident) nu conține vectorul nul.

Să arătăm că şi acestui sistem i se poate asocia vectorul $\overline{v_{p+1}}\neq\overline{0}$ astfel încât sistemul $S'=\{\overline{v_i}\}_{i=1,2,...,p+1}$ să fie ortogonal.

Fie $\overline{v_{p+1}}=\overline{u_{p+1}}+\sum_{k=1}^{p}\lambda_{p+1}^{k}\overline{v_k}$, unde $\lambda_{p+1}^{k}=-\dfrac{\langle\overline{u_{p+1}},\overline{v_k}\rangle}{\|\overline{v_k}\|^2}$.

Atunci, oricare ar fi $j=1,2,...,p$, avem

$$\langle\overline{v_{p+1}},\overline{v_j}\rangle=\langle\overline{u_{p+1}},\overline{v_j}\rangle-\sum_{k=1}^{p}\frac{\langle\overline{u_{p+1}},\overline{v_k}\rangle}{\|\overline{v_k}\|^2}\langle\overline{v_k},\overline{v_j}\rangle$$

$$=\langle\overline{u_{p+1}},\overline{v_j}\rangle-\frac{\langle\overline{u_{p+1}},\overline{v_j}\rangle}{\|\overline{v_j}\|^2}\langle\overline{v_j},\overline{v_j}\rangle=0.$$

Cum vectorul $\overline{u_{p+1}}\neq\overline{0}$ ca fiind vector dintr-o bază, rezultă că şi $\overline{v_{p+1}}\neq\overline{0}$ şi prin urmare sistemul S' este un sistem ortogonal ce nu conține vectorul nul, deci un sistem liniar independent.

Sistemul de vectori $\overline{v_1},\overline{v_2},...,\overline{v_n}$ construit după procedeul lui Schmidt fiind un sistem liniar independent într-un spațiu de dimensiune n este o bază ortogonală în spațiul $(V,\langle,\rangle)$.

Baza $B'=\{\overline{e_i}=\dfrac{\overline{v_i}}{\|\overline{v_i}\|}\}_{i=1,2,...,n}$ este evident ortonormată.

Propoziția 4.1.5.2. Într-un spațiu euclidian $(V,\langle,\rangle)$ raportat la o bază ortonormată $B=\{\overline{e_1},\overline{e_2},...,\overline{e_n}\}$ au loc următoarele proprietăți:

a) Matricea produsului scalar relativ la o bază ortonormată este matricea unitate.

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă $\bar{v}, \bar{w}$ sunt doi vectori din V, $\bar{v} = x^i \overline{e_i}$, $\bar{w} = y^j \overline{e_j}$, atunci produsul lor scalar este $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$ iar norma $\|\bar{v}\| = (\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2)^{\frac{1}{2}}$.

c) Orice vector $\bar{v} \in V$ se exprimă în baza ortonormată B prin:

$$\bar{v} = \langle \overline{v_1}, \overline{e_1} \rangle \overline{e_1} + \langle \overline{v_1}, \overline{e_2} \rangle \overline{e_2} + ... + \langle \overline{v_1}, \overline{e_n} \rangle \overline{e_n} \qquad (4.1.5.2)$$

d) Coordonatele în baza ortonormată B ale versorului asociat direcției şi sensului unui vector $\bar{v}$, sunt respectiv cosinusurile unghiurilor dintre $\bar{v}$ şi $\overline{e_i}$ cu $i = 1,2,...,n$ şi se numesc **cosinusurile directoare** ale vectorului $\bar{v}$.

Demonstrație.

a) Evident, din definiția bazei ortonormate.

b) $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle x^i \overline{e_i}, y^j \overline{e_j} \rangle = x^i y^j \langle \overline{e_i}, \overline{e_j} \rangle = x^i y^j \delta_i^j = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$.

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x^i x^i} = (\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

c) Presupunem că $\bar{v} = x^i \overline{e_i}$. Atunci

$$\langle \bar{v}, \overline{e_j} \rangle = \langle x^i \overline{e_i}, \overline{e_j} \rangle = x^i \delta_i^j = x^j, \forall j = 1,2,...,n.$$

d) Dacă $\bar{v} = x^i \overline{e_i}$, atunci versorul asociat este

$$\overline{v^0} = \frac{1}{\|\bar{v}\|} \bar{v} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2}} (x^1 \overline{e_1} + x^2 \overline{e_2} + ... + x^n \overline{e_n}).$$

A i-a coordonată a vectorului $\overline{v^0}$ este $\frac{x^i}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + ... + (x^n)^2}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte, dacă α_i este măsura unghiului dintre vectorii $\bar{v}$ şi $\overline{e_i}$, atunci

$$\cos\alpha_i = \frac{\langle \bar{v}, \overline{e_i} \rangle}{\|\bar{v}\| \cdot \|\overline{e_i}\|} = \frac{\langle x^j \overline{e_j}, \overline{e_i} \rangle}{\|\bar{v}\|} = \frac{x^j \delta_i^j}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2}} =$$

$$= \frac{x^i}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2}}$$

Exemplu

Fie $\bar{v} = (2,0,-3) \in (R^3, \langle , \rangle)$. Cosinusurile directoare ale direcţiei şi sensului lui $\bar{v}$ le obţinem calculând

$$\overline{v^0} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2,0,-3);\ \cos\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{13}},\ \cos\alpha_2 = 0 \text{ şi } \cos\alpha_3 = -\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Definiţia 4.1.5.3. *O matrice pătratică A cu elemente reale se numeşte* ***matrice ortogonală,*** *dacă* $AA^\tau = I$.

Proprietăţi ale matricelor ortogonale

a) Determinantul unei matrice ortogonale este ± 1. Într-adevăr, $\det(AA^\tau) = \det I$ şi cum $\det A^\tau = \det A$ rezultă că $(\det A)^2 = 1$ adică $\det A = \pm 1$.

b) Orice matrice ortogonală este inversabilă şi inversa ei este de asemenea, ortogonală:

$\det A = \pm 1 \neq 0$ implică A este inversabilă.

Din $AA^\tau = I$ rezultă $A^{-1} = A^\tau$. Astfel, $A^{-1}(A^{-1})^\tau = A^\tau (A^\tau)^{-1} = I$ şi deci matricea A^{-1} este ortogonală.

c) Dacă A este o matrice ortogonală, atunci $A^\tau A = I$ şi reciproc.

Din b) avem $A^\tau A = A^{-1}A = I$. Dacă $A^\tau A = I$ rezultă că A este inversabilă şi $A^{-1} = A^\tau$. Atunci $AA^{-1} = I$ implică $AA^\tau = I$, adică A este matrice ortogonală.

d) Produsul a două matrice ortogonale este tot o matrice ortogonală.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, fie A şi B două matrice ortogonale. Atunci

$$(AB)\cdot(AB)^{\tau} = (AB)\cdot(B^{\tau}A^{\tau}) = A\cdot(BB^{\tau})A^{\tau} = AIA^{\tau} = I\,.$$

Consecinţă. Din b) şi d) rezultă că mulţimea matricelor ortogonale $O(n,R)$ este subgrup al grupului $GL(n,R)$ al matricelor pătratice nesingulare. Grupul $O(n,R)$ se numeşte **grupul ortogonal de ordin n**.

Subgrupul $SO(n,R)\subset O(n,R)$ al matricelor ortogonale de determinant 1 se numeşte **grup special ortogonal**. Grupul $SO(n,R)$, $n=2,3$ are un rol deosebit în mecanica solidului rigid.

Propoziţia 4.1.5.3. *Fie* $(V,\langle,\rangle)$ *un spaţiu euclidian şi* $B=\{\overline{e_1},\overline{e_2},...,\overline{e_n}\}$, $B'=\{\overline{e'_1},\overline{e'_2},...,\overline{e'_n}\}$ *două baze în V. Dacă B şi B' sunt două baze ortonormate, atunci matricea de trecere* $T_{BB'}$ *de la baza B la baza B' este ortogonală şi reciproc, dacă baza B este ortonormată şi matricea de trecere* $T_{BB'}$ *de la baza B la baza B' este ortogonală, atunci şi baza B' este ortonormată.*

Demonstraţie. Fie $\overline{e'_i} = a_i^k\,\overline{e_k}$ (4.1.5.3)

Presupunem că bazele B şi B' sunt ortonormate, adică

$$\left\langle \overline{e_i},\overline{e_j}\right\rangle = \delta_i^j \qquad (4.1.5.4)$$

$$\left\langle \overline{e'_i},\overline{e'_j}\right\rangle = \delta_i^j \qquad (4.1.5.5)$$

Ţinând seama de relaţia (4.1.5.3) relaţia (4.1.5.5) devine

$$\delta_i^j = \left\langle a_i^k\overline{e_k}, a_j^l\overline{e_l}\right\rangle = a_i^k a_j^l\left\langle \overline{e_k},\overline{e_l}\right\rangle = a_i^k a_j^l\delta_k^l = \sum_{k=1}^{n} a_i^k a_j^k$$

adică $I = T_{BB'}^{\tau}\cdot T_{BB'}$ şi deci matricea de trecere $T_{BB'}$ este ortogonală.

Reciproc, presupunem că baza B este ortonormată, $\left\langle \overline{e_i},\overline{e_j}\right\rangle = \delta_i^j$ şi că matricea de trecere $T_{BB'} = (a_i^j)_{\substack{j-coloana\\ i-linia}}$ este ortogonală $\sum_{k=1}^{n} a_i^k a_j^k = \delta_i^j$.

Să arătăm că şi baza B este ortonormată:

Scanned with OKEN Scanner

$$\langle \overline{e'_i}, \overline{e'_j} \rangle = \langle a_i^k \overline{e_k}, a_j^l \overline{e_l} \rangle = a_i^k a_j^l \langle \overline{e_k}, \overline{e_l} \rangle = a_i^k a_j^l \delta_k^l = \sum_{k=1}^{n} a_i^k a_j^k = \delta_i^j .$$

4.1.6. Analiza structurii agenților economici

Putem aplica noțiunile precedente în **analiza structurii activităților agenților economici**.

Dacă activitatea unei firme este descrisă la un moment oarecare t prin vectorul $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ în spațiul aprovizionării şi la momentul t_1, cu $t_1 > t$, activitatea va fi descrisă de vectorul $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, atunci putem spune că activitatea nu şi-a schimbat structura, ci doar volumul dacă unghiul $\theta = 0$ $(\cos\theta = 1)$. Astfel, concluzionăm că, cu cât $\cos\theta$ este mai mic, cu atât schimbarea structurii activității este mai mare.

Aplicație. O firmă a obținut următoarea structură a desfacerilor la 3 produse : $x = (10,40,20)$, cu variantele $v_1 = (15,6,30)$ şi $v_2 = (20,10,20)$. În acest caz θ_1 este unghiul dintre x şi v_1 iar θ_2 este unghiul dintre x şi v_2.

$\cos\theta_1 = 1$ iar $\cos\theta_2 > 1$. Astfel, rezultă că prima variantă v_1 nu prezintă nici o modificare a structurii desfacerilor deoarece $\theta_1 = 0$, însă a doua variantă v_2 prezintă această modificare deoarece $\theta_2 > 0$.

Scanned with OKEN Scanner

4.2. Subspații ortogonale într-un spațiu euclidian

Definiția 4.2.1. *Fie* $(V,\langle,\rangle)$ *un spațiu euclidian,* $\bar{v}\in V$ *un vector fixat și* $S(\subset V)$ *un subspațiu vectorial al lui V. Vectorul* $\bar{v}$ *este* ***ortogonal pe subspațiul S*** *și notăm* $\bar{v}\perp S$, *dacă* $\bar{v}$ *este ortogonal pe orice vector din S.*

Definiția 4.2.2. *Două subspații* S_1 *și* S_2 *ale spațiului euclidian* $(V,\langle,\rangle)$ *sunt* ***ortogonale*** *și notăm* $S_1\perp S_2$, *dacă orice vector din subspațiul* S_1 *este ortogonal pe subspațiul* S_2.

Exemplul 1.

Fie $S_1=\{\bar{v}(x,y,z)\in(R^3,\langle,\rangle)\ |x-2y-3z=0\}$

și

$$S_2=\{\bar{w}(x,y,z)\in(R^3,\langle,\rangle)\ |2x+y=0\ \ si\ \ 3y-2z=0\}$$

două subspații ale spațiului euclidian standard $(R^3,\langle,\rangle)$. Aceste subspații se pot da în forma echivalentă:

$$S_1=\{\bar{v}\in R^3\ |\bar{v}=(2\alpha+3\beta,\alpha,\beta),\alpha,\beta\in R\},$$

$$S_2=\{\bar{w}\in R^3\ |\bar{w}=(-\gamma,2\gamma,3\gamma),\gamma\in R\}.$$

Oricare ar fi $\bar{v}\in S_1$ și oricare ar fi $\bar{w}\in S_2$, $\langle\bar{v},\bar{w}\rangle=0$ și deci $S_1\perp S_2$.

Propoziția 4.2.1. *Fie* $(V,\langle,\rangle)$ *un spațiu euclidian,* $\bar{v}\in V$ *un vector fixat și* $S_1,S_2\subseteq V$ *două subspații vectoriale ale lui V în care s-au fixat respectiv bazele* $B_1=\{\overline{u_i}\}$, $i=1,2,...,\dim S_1$, $B_2=\{\overline{v_j}\}$, $j=1,2,...,\dim S_2$. *În aceste condiții:*

a) Vectorul $\bar{v}\in V$ *este ortogonal pe subspațiul* S_1 *dacă și numai dacă* $\bar{v}$ *este ortogonal pe orice vector din baza* B_1.

Scanned with OKEN Scanner

b) Subspațiile S_1 și S_2 sunt ortogonale, dacă și numai dacă bazele B_1 și B_2 sunt ortogonale, adică $\langle \overline{u_i}, \overline{v_j} \rangle == 0, \forall i, j$.

Demonstrație. a) Presupunem că $\bar{v} \perp S_1$. Rezultă că $\langle \bar{v}, \overline{w} \rangle = 0$, $\forall \overline{w} \in S_1$, în particular $\langle \bar{v}, \overline{u_i} \rangle = 0, \forall i$ și deci $\bar{v} \perp B_1$.

Reciproc, dacă $\langle \bar{v}, \overline{u_i} \rangle = 0, \forall i$ și $\overline{w} = y^j \overline{w_j}$ este un vector arbitrar din S_1, atunci $\langle \bar{v}, \overline{w} \rangle = y^j \langle \bar{v}, \overline{w_j} \rangle = 0$ și deci $\bar{v} \perp S_1$.

b) Presupunem că $S_1 \perp S_2$. Atunci oricare ar fi $\overline{w_1} \in S_1$ și oricare ar fi $\overline{w_2} \in S_2$, $\langle \overline{w_1}, \overline{w_2} \rangle = 0$, deci, în particular, oricare ar fi $\overline{u_i} \in B_1 \subset S_1$ și $\overline{v_j} \in B_2 \subset S_2$ avem $\langle \overline{u_i}, \overline{v_j} \rangle = 0$.

Reciproc, presupunem că $B_1 \perp B_2$, adică $\langle \overline{u_i}, \overline{v_j} \rangle = 0$, $\forall i.j$. Fie $\overline{w_1} = x^i \overline{u_i} \in S_1$ și $\overline{w_2} = y^j \overline{v_j} \in S_2$. Atunci $\langle \overline{w_1}, \overline{w_2} \rangle = x^i y^j \langle \overline{u_i}, \overline{v_j} \rangle = 0$ și prin urmare $S_1 \perp S_2$.

Exemplul 2.

În Exemplul 1, în subspațiul $S_1 = \{\bar{v} \in R^3 \mid \bar{v} = \alpha(2,1,0) + \beta(3,0,1)\}$ avem baza $B_1 = \{\overline{u_1} = (2,1,0), \overline{u_2} = (3,0,1)\}$, iar în subspațiul $S_2 = \{\overline{w} \in R^3 \mid \overline{w} = \gamma(-1,2,3)\}$ avem baza $B_2 = \{\overline{v_1} = (-1,2,3)\}$. Cum $\langle \overline{u_1}, \overline{v_1} \rangle = 0$ și $\langle \overline{u_2}, \overline{v_1} \rangle = 0$ rezultă că $B_1 \perp B_2$ de unde $S_1 \perp S_2$.

Definiția 4.2.3. *Fie S un subspațiu vectorial al spațiului euclidian $(V, \langle , \rangle)$.* ***Complementul ortogonal*** *al lui S, notat $S^\perp$ este mulțimea vectorilor din spațiul V ortogonali pe subspațiul S.*

Propoziția 4.2.2. Complementul ortogonal al unui subspațiu vectorial de dimensiune k al unui spațiu euclidian n-dimensional $(V, \langle , \rangle)$ este un subspațiu vectorial de dimensiune n-k în V.

Demonstrație. Fie S subspațiul de dimensiune k al lui $(V, \langle , \rangle)$ și $B = \{\overline{u_1}, \overline{u_2}, ..., \overline{u_k}\}$ o bază în S. Conform Definiției 4.2.1.3,

$$S^\perp = \{\bar{v} \in (V, \langle , \rangle) \mid \bar{v} \perp S\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să arătăm că S este subspațiu vectorial al lui V. În acest scop, fie $\alpha,\beta \in R$ şi $\overline{v_1},\overline{v_2} \in S^{\perp}$. Avem atunci $\langle \overline{v_1},\overline{u}\rangle = 0$ şi $\langle \overline{v_2},\overline{u}\rangle = 0$, $\forall \overline{u} \in S$.

Astfel $\langle \alpha\overline{v_1}+\beta\overline{v_2},\overline{u}\rangle = \alpha\langle \overline{v_1},\overline{u}\rangle + \beta\langle \overline{v_2},\overline{u}\rangle = 0, \forall \overline{u} \in S$ şi, prin urmare, $\alpha\overline{v_1}+\beta\overline{v_2} \in S$ deci $S^{\perp}$ este subspațiu al lui V.

Pentru a evidenția dimensiunea subspațiului $S^{\perp}$ îl identificăm, în continuare, cu mulțimea soluțiilor unui sistem liniar şi omogen.

Conform Propoziției 4.2.1.2, $S^{\perp} = \{\overline{v} \in V \mid \langle \overline{v},\overline{u_i}\rangle = 0, \forall i = 1,2,..,k\}$.

Alegem o bază ortonormată $B = \{\overline{e_1},\overline{e_2},...,\overline{e_n}\}$ în $(V,\langle,\rangle)$ şi presupunem că vectorii bazei $B_1 \subset S$ admit exprimarea

$$\overline{u_i} = \alpha_i^j \overline{e_j},\ i = 1,2,...,k; j = 1,2,...,n \qquad (4.2.1.1)$$

iar un vector $\overline{v} \in S^{\perp}$ se scrie

$$\overline{v} = x^p \overline{e_p} \qquad (4.2.1.2)$$

Cu aceste notații şi precizări, subspațiul $S^{\perp}$ este mulțimea

$$S^{\perp} = \{\overline{v} = x^p \overline{e_p} \in V \mid \langle \overline{v},\overline{u_i}\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x^p \overline{e_p}, \alpha_i^j \overline{e_j}\rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_i^j x^p \delta_p^j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j x^j = 0,\ i = 1,2,...,k\}$$

Prin urmare, $S^{\perp}$ se identifică cu mulțimea soluțiilor sistemului liniar şi omogen

$$\begin{cases} \alpha_1^1 x^1 + \alpha_1^2 x^2 + ... + \alpha_1^n x^n = 0 \\ \alpha_2^1 x^1 + \alpha_2^2 x^2 + ... + \alpha_2^n x^n = 0 \\ ..... \\ \alpha_k^1 x^1 + \alpha_k^2 x^2 + ... + \alpha_k^n x^n = 0 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Matricea sistemului are rangul k pentru că liniile sale sunt formate din coordonatele vectorilor liniar indepndenți $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_k}$ în baza B. Aceasta ne asigură că dimensiunea spațiului soluțiilor, deci a lui $S^{\perp}$ este n-k.

Observație. Intersecția dintre un subspațiu S' al unui spațiu euclidian $(V, \langle , \rangle)$ şi complementul său ortogonal $S'^{\perp}$ conține doar vectorul nul şi prin urmare, spațiul V este suma directă a celor două subspații :

$$V = S \oplus S^{\perp}.$$

Într-adevăr, presupunem că există $\overline{v} \neq \overline{0_V}, \overline{v} \in S \cap S^{\perp}$.

Astfel $\overline{v} \in S$ şi $\overline{v} \in S^{\perp}$. Dar $\overline{v} \in S^{\perp}$ implică $\langle \overline{v}, \overline{w} \rangle = 0$, $\forall \overline{w} \in S$, deci, în particular şi pentru $\overline{w} = \overline{v} \in S$, avem $\langle \overline{v}, \overline{v} \rangle = 0$ ceea ce contrazice ipoteza $\overline{v} \neq \overline{0_V}$.

Rezultă că presupunerea făcută este falsă şi deci $S \cap S^{\perp} = \overline{0_V}$.

Observație. În cele ce urmează, pentru un vector nenul $\overline{v} \in (V, \langle , \rangle)$, $\overline{v}^{\perp}$ semnifică complementul ortogonal al subspațiului generat de vectorul $\overline{v}$.

4.3. Operatori liniari pe spații euclidiene

4.3.1. Operatori simetrici

Definiția 4.3.1.1. *Fie* $(V, \langle , \rangle)$ *un spațiu euclidian. Un operator liniar*

$$T : (V, \langle , \rangle) \to (V, \langle , \rangle)$$

este un ***operator simetric,*** *dacă*

Scanned with OKEN Scanner

$$\langle T\bar{v}, \bar{w}\rangle = \langle \bar{v}, T\bar{w}\rangle, \ \forall \bar{v}, \bar{w} \in V .$$

Propoziția 4.3.1. *Fie* $T:(V,\langle,\rangle)\to(V,\langle,\rangle)$ *un operator liniar și* B *o bază ortonormată în spațiul euclidian* $(V,\langle,\rangle)$. *Operatorul* T *este simetric dacă și numai dacă matricea sa relativ la baza* B *este simetrică.*

Demonstrație. Presupunem că

$$T\bar{e}_i = \alpha_i^j \bar{e}_j \qquad (4.3.1.1)$$

Avem următorul șir de echivalențe:

$$\langle T\bar{e}_i, \bar{e}_k\rangle = \langle \bar{e}_i, T\bar{e}_k\rangle \Leftrightarrow \langle \alpha_i^j \bar{e}_j, \bar{e}_k\rangle = \langle \bar{e}_i, \alpha_k^l \bar{e}_l\rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_i^j \delta_j^k = \alpha_k^l \delta_i^l \Leftrightarrow \alpha_i^k = \alpha_k^i, \ \forall i,k = 1,2,...,n.$$

Implicațiile de la stânga spre dreapta ne asigură că un operator simetric are matricea simetrică relativ la o bază ortonormată.

În sens invers, obținem că dacă matricea operatorului T relativ la o bază ortonormată este simetrică atunci:

$$\langle T\bar{e}_i, \bar{e}_k\rangle = \langle \bar{e}_i, T\bar{e}_k\rangle, \forall i,k = 1,2,...,n. \qquad (4.3.1.2)$$

Să arătăm că

$$\langle T\bar{v}, \bar{w}\rangle = \langle \bar{v}, T\bar{w}\rangle, \ \forall \bar{v}, \bar{w} \in V .$$

În acest scop, fie $\bar{v} = x^i \bar{e}_i$ și $\bar{w} = y^k \bar{e}_k$. Atunci

$$\langle T\bar{v}, \bar{w}\rangle = \langle x^i T\bar{e}_i, y^k \bar{e}_k\rangle = x^i y^k \langle T\bar{e}_i, \bar{e}_k\rangle$$

și

$$\langle \bar{v}, T\bar{w}\rangle = \langle x^i \bar{e}_i, y^k T\bar{e}_k\rangle = x^i y^k \langle \bar{e}_i, T\bar{e}_k\rangle .$$

Ținând seama de (4.4.1.2) rezultă $\langle T\bar{v}, \bar{w}\rangle = \langle \bar{v}, T\bar{w}\rangle$, adică operatorul T este simetric.

Propoziția 4.3.1.2. *Rădăcinile polinomului caracteristic al unui operator simetric sunt reale.*

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Fie T un operator simetric pe spațiul euclidian $(V,\langle,\rangle)$. Cum polinomul caracteristic al unui operator liniar nu depinde de baza aleasă în spațiul V, fie $B=\{\overline{e_1},\overline{e_2},...,\overline{e_n}\}$ o bază ortonormată în $(V,\langle,\rangle)$. Notăm cu M_B matricea operatorului T relativ la această bază.

Evident,

$$M_B = M_B^{\tau} \qquad (4.3.1.3)$$

Polinomul caracteristic al operatorului T este

$$P_B(\lambda) = \det(M_B - \lambda I)$$

şi este un polinom cu coeficienți reali.

Demonstrăm propoziția prin reducere la absurd, presupunând că polinomul P_n are o rădăcină complexă λ_0. Atunci sistemul

$$(M_B - \lambda_0 I)X = 0$$

va avea ca soluții n-upluri de numere complexe.

Fie $X_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ \vdots \\ x_0^n \end{bmatrix}$, $x_0^i \in C$, $i=1,2,..,n$ o astfel de soluție şi $\overline{X_0}$ matricea complex conjugată asociată lui X_0, $\overline{X_0} = \begin{bmatrix} \overline{x_o^1} \\ \overline{x_0^2} \\ \vdots \\ \overline{x_0^n} \end{bmatrix}$ unde $\overline{x_0^i}$ sunt numerele complex conjugate cu x_0^i, $i=1,2,..,n$.

Matricea X_0 satisface relația

$$M_B X_0 = \lambda_0 X_0 \qquad (4.3.1.4)$$

Înmulțind la stânga fiecare membru din (4.3.1.4) cu transpusa matricei X_0, $\overline{X_0^{\tau}}$, obținem

Scanned with OKEN Scanner

$$\overline{X_0^\tau M_B X_0} = \lambda_0 X_0^\tau X_0 \qquad (4.3.1.5)$$

Dar

$$\overline{X_0^\tau} X_0 = \left[\overline{x_0^1} \quad \overline{x_0^2} \quad \dots \quad \overline{x_0^n}\right] \cdot \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ \vdots \\ x_0^n \end{bmatrix} = \left|x_0^1\right|^2 + \left|x_0^2\right|^2 + \dots + \left|x_0^n\right|^2 \in R \quad (4.3.1.6)$$

Să arătăm că şi numărul din membrul stâng al relației (8.4.1.5) este un număr real, arătând că el coincide cu complex conjugatul său.

Matricea $\overline{X_0^\tau M_B X_0}$ fiind o matrice de tip (1,1) este egală cu transpusa sa:

$$(\overline{X_0^\tau M_B X_0})^\tau = \overline{X_0^\tau} M_B X_0 \qquad (4.3.1.7)$$

Trecând la conjugarea complexă în (5.3.1.7), avem:

$$\overline{(\overline{X_0^\tau} M_B X_0)^\tau} = \overline{\overline{X_0^\tau} M_B X_0} \qquad (4.3.1.8)$$

Din faptul că în general $(AC)^\tau = C^\tau A^\tau$ şi că matricea M_B este simetrică, egalitatea (8.4.1.8) devine

$$\overline{(X_0^\tau M_B \overline{X}_0)} = \overline{X_0^\tau} \overline{M_B X_0} \qquad (4.3.1.9)$$

Ținând seama în membrul stâng din (5.3.1.9) că M_B are elemente reale, deci $\overline{M_B} = M_B$, rezultă

$$\overline{X_0^\tau M_B X_0} = \overline{\overline{X_0^\tau} M_B X_0} \qquad (4.3.1.10)$$

Din relația (8.4.1.5) avem

$$\lambda_0 = \frac{\overline{X_0^\tau M_B X_0}}{\sum_{i=1}^{n} (x_0^i)^2},$$

deci, λ_0 este un număr real ca fiind câtul a două numere reale, ceea ce contrazice ipoteza că $\lambda_0 \in C$. Rezultă că presupunerea făcută este falsă şi deci, toate rădăcinile polinomului caracteristic ale operatorului simetric T sunt reale.

Scanned with OKEN Scanner

Propoziția 4.3.1.3. *Fie T un operator simetric pe spațiul euclidian $(V,\langle,\rangle)$. La valori proprii distincte ale operatorului T corespund vectori proprii ortogonali.*

Demonstrație. Fie λ_1,λ_2 două valori proprii distincte şi $\overline{v_1},\overline{v_2}$ vectorii proprii corespunzători respectiv acestor valori:

$$T\overline{v_1}=\lambda_1\overline{v_1} \text{ şi } T\overline{v_2}=\lambda_2\overline{v_2} \qquad (4.4.1.11)$$

T fiind operator simetric, avem

$$\left\langle T\overline{v_1},\overline{v_2}\right\rangle=\left\langle\overline{v_1},T\overline{v_2}\right\rangle \qquad (4.4.1.12)$$

Ținând seama de (4.4.1.11) în (4.4.1.12), obținem:

$$\left\langle\lambda_1\overline{v_1},\overline{v_2}\right\rangle=\left\langle\overline{v_1},\lambda_2\overline{v_2}\right\rangle\Leftrightarrow\lambda_1\left\langle\overline{v_1},\overline{v_2}\right\rangle=\lambda_2\left\langle\overline{v_1},\overline{v_2}\right\rangle\Leftrightarrow(\lambda_1-\lambda_2)\left\langle\overline{v_1},\overline{v_2}\right\rangle=0 \qquad (4.4.1.13)$$

Cum $\lambda_1\neq\lambda_2$, rezultă că $\lambda_1-\lambda_2\neq 0$ şi deci (4.4.1.13) ne asigură că $\left\langle\overline{v_1},\overline{v_2}\right\rangle=0$ adică $\overline{v_1}\perp\overline{v_2}$.

Vom utiliza, în continuare, următorul rezultat important pe care-l dăm fără demonstrație:

Teorema 4.3.1.1. *Fie $T:(V,\langle,\rangle)\to(V,\langle,\rangle)$ un operator simetric pe spațiul euclidian $(V,\langle,\rangle)$ de dimensiune n. Atunci, în $(V,\langle,\rangle)$ există o bază ortonormată formată din vectori proprii ai operatorului T.*

Corolar. Teorema 4.3.1.1 ne asigură că orice operator simetric este diagonalizabil şi prin urmare dimensiunea fiecărui subspațiu propriu al operatorului coincide cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii corespunzătoare.

Această particularitate ne permite să dăm următoarea modalitate practică de construcție a unei baze ortonormate în spațiul euclidian $(V,\langle,\rangle)$, bază formată din vectori proprii ai operatorului simetric $T:(V,\langle,\rangle)\to(V,\langle,\rangle)$.

a) Se determină valorile proprii ale operatorului T.

b) Se determină subspațiile proprii corespunzătoare valorilor proprii distincte şi câte o bază în fiecare subspațiu propriu.

Scanned with OKEN Scanner

c) Folosind procedeul lui Schmidt, se ortonormează baza din fiecare subspațiu propriu.

d) Reuniunea bazelor ortonormate din subspațiile proprii constituie baza ortonormată căutată, pentru că bazele din subspații proprii corespunzătoare la valori proprii distincte sunt ortogonale.

Teorema 4.3.1.1 este utilă pentru reducerea la forma canonică a unei forme pătratice definită pe un spațiu euclidian $(V,\langle,\rangle)$.

Pentru a pune în evidență acest aspect, demonstrăm:

Propoziția 4.3.1.4. *Fie* $(V,\langle,\rangle)$ *un spațiu euclidian. Orice operator simetric* T *pe* V *definește o aplicație biliniară și simetrică* $\varphi: V\times V\to R$ *definită prin:*

$$\varphi(\bar{v},\bar{w})=\langle T\bar{v},\bar{w}\rangle \qquad (4.3.1.14)$$

și reciproc, oricare ar fi forma biliniară și simetrică $\varphi: V\times V\to R$ *există un unic operator simetric* T *pe* V, *astfel încât* $\varphi(\bar{v},\bar{w})=\langle T\bar{v},\bar{w}\rangle$.

Demonstrație. Presupunem că T este un operator simetric pe V, adică

$$\langle T\bar{v},\bar{w}\rangle=\langle \bar{v},T\bar{w}\rangle \qquad (4.3.1.15)$$

Aplicația $\varphi: V\times V\to R$ definită prin (4.3.1.14) este o aplicație simetrică:

$$\varphi(\bar{v},\bar{w})=\varphi(\bar{w},\bar{v}).$$

Pentru a dovedi că φ este biliniară, este suficient să demonstrăm liniaritatea în primul argument:

a) $\varphi(\overline{v_1}+\overline{v_2},\bar{w})=\langle T(\overline{v_1}+\overline{v_2}),\bar{w}\rangle=\langle T\overline{v_1}+T\overline{v_2},\bar{w}\rangle$

$$=\langle T\overline{v_1},\bar{w}\rangle+\langle T\overline{v_2},\bar{w}\rangle$$

$$=\varphi(\overline{v_1},\bar{w})+\varphi(\overline{v_2},\bar{w}).$$

b) $\varphi(\alpha\bar{v},\bar{w})=\langle T(\alpha\bar{v}),\bar{w}\rangle=\langle \alpha T\bar{v},\bar{w}\rangle=\alpha\langle T\bar{v},\bar{w}\rangle=\alpha\varphi(\bar{v},\bar{w}),\quad \alpha\in R.$

Scanned with OKEN Scanner

Reciproc, fie $\varphi: V \times V \to R$ o aplicaţie biliniară şi simetrică şi $B = \{\overline{e_i}\}_n$ o bază ortonormată în V. Notăm $\alpha_{ij} = \varphi(\overline{e_i}, \overline{e_j})$, $i, j = 1,2,..,n$.

Evident, matricea M de elemente (α_{ij}) este o matrice simetrică şi prin urmare defineşte un unic operator simetric $T: (V, \langle , \rangle) \to (V, \langle , \rangle)$ care în baza ortonormată B are matricea M:

$$T\overline{e_i} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \overline{e_j} \qquad (4.3.1.16)$$

Dacă $\overline{v} = x^i \overline{e_i} \in (V, \langle , \rangle)$, atunci

$$T\overline{v} = \sum_{j=1}^{n} x^i \alpha_{ij} \overline{e_j} \qquad (4.3.1.17)$$

Notăm

$$z_j = \alpha_{ij} x^i \qquad (4.3.1.18)$$

Fie $\overline{w} = y^j \overline{e_j}$.

$$\varphi(\overline{v}, \overline{w}) = \alpha_{ij} x^i y^j \qquad (4.3.1.19)$$

Ţinând seama de (4.4.1.18) şi (4.4.1.19), obţinem

$$\varphi(\overline{v}, \overline{w}) = z_j y^j = \langle T\overline{v}, \overline{w} \rangle.$$

Consecinţă. Dacă $f: (V, \langle , \rangle) \to R$ este o formă pătratică pe $(V, \langle , \rangle)$, atunci există un unic operator simetric $T: (V, \langle , \rangle) \to (V, \langle , \rangle)$, astfel încât

$$f(\overline{v}) = \langle T\overline{v}, \overline{v} \rangle \qquad (4.3.1.20)$$

Observaţie. Consecinţa de mai sus şi Teorema 4.3.1.1 generează următorul algoritm de reducere la forma canonică a unei forme pătratice $f: (V, \langle , \rangle) \to R$:

Algoritm. Cunoscând expresia analitică a formei pătratice f relativ la o bază ortonormată B în $(V, \langle , \rangle)$, $f(\overline{v})_B = \alpha_{ij} x^i x^j$ se

Scanned with OKEN Scanner

determină valorile proprii şi subspaţiile proprii corespunzătoare ale operatorului simetric T care în baza B are matricea $M_B = (\alpha_{ij})$.

Se construieşte, apoi, baza ortonormată $B' = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n}\}$ în $(V, \langle , \rangle)$ formată din vectori proprii ai operatorului T, $T\overline{v_i} = \lambda_i \overline{v_i}$, $i = 1,2,...,n$.

Dacă $\overline{v} = y^i \overline{v_i}$, atunci expresia analitică a formei pătratice f relativ la baza B' devine:

$$f(\overline{v}) = \left\langle T\overline{v}, \overline{v} \right\rangle = \left\langle y^i T\overline{v_i}, y^j \overline{v_j} \right\rangle = y^i y^j \left\langle \lambda_i \overline{v_i}, \overline{v_j} \right\rangle = y^i y^j \lambda_i \delta_i^j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (y^i)^2$$

adică în baza B' forma pătratică f are forma canonică.

4.3.2. Operatori ortogonali

Definiţia 4.3.2.1. *Un operator liniar T pe spaţiul euclidian $(V, \langle , \rangle)$ este un* ***operator ortogonal,*** *dacă invariază produsul scalar a doi vectori, adică*

$$\left\langle T\overline{v}, T\overline{w} \right\rangle = \left\langle \overline{v}, \overline{w} \right\rangle, \ \forall \overline{v}, \overline{w} \in (V, \langle , \rangle) \qquad (4.4.2.1)$$

Observaţii.

a) Un operator ortogonal invariază norma unui vector şi unghiul a doi vectori.

Într-adevăr, $\left\| T\overline{v} \right\| = \sqrt{\left\langle T\overline{v}, T\overline{v} \right\rangle} = \sqrt{\left\langle \overline{v}, \overline{v} \right\rangle} = \left\| \overline{v} \right\|$ şi $\dfrac{\left\langle T\overline{v}, T\overline{w} \right\rangle}{\left\| T\overline{v} \right\| \cdot \left\| T\overline{w} \right\|} = \dfrac{\left\langle \overline{v}, \overline{w} \right\rangle}{\left\| \overline{v} \right\| \cdot \left\| \overline{w} \right\|}$

b) Un operator ortogonal T este bijectiv pentru că dacă $\overline{v} \in Ker\ T$, relaţia $\left\| T\overline{v} \right\| = \left\| \overline{v} \right\|$ implică $0 = \left\| \overline{v} \right\|$, adică $\overline{v} = \overline{0_V}$.

c) Un operator ortogonal T aplică bijectiv o bază ortonormată $B = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}\} \subset (\mathbf{V}, \langle , \rangle)$ într-o bază ortonormată

$$B' = \{T\overline{e_1}, T\overline{e_2}, ..., T\overline{e_n}\} \subset (\mathbf{V}, \langle , \rangle).$$

Scanned with OKEN Scanner

Propoziția 4.3.2.1. *Fie T un operator liniar pe spațiul euclidian $(V,\langle,\rangle)$ și $B=\{\overline{e_i}\}_n$ o bază ortonormată în $(V,\langle,\rangle)$. T este operator ortogonal, dacă și numai dacă matricea operatorului relativ la baza B este ortogonală.*

Demonstrație. Presupunem că $T\overline{e_i}=\alpha_i^k\overline{e_k}$.

Prin ipoteză $\langle\overline{e_i},\overline{e_j}\rangle=\delta_i^j$, $\forall i,j=1,2,...,n$. Relația $\langle T\overline{e_i},T\overline{e_j}\rangle=\langle\overline{e_i},\overline{e_j}\rangle=\delta_i^j$ este echivalentă cu

$$\delta_i^j=\langle\alpha_i^k\overline{e_k},\alpha_j^l\overline{e_l}\rangle=\alpha_i^k\alpha_j^l\delta_k^l=\sum_{k=1}^{n}\alpha_i^k\alpha_j^k$$

adică $M_B^\tau M_B=I$. Deci, T este ortogonal, dacă și numai dacă matricea relativ la o bază ortonormată este ortogonală.

Consecință. Compusul a doi operatori ortogonali este un operator ortogonal și inversul unui operator ortogonal este un operator ortogonal, proprietăți asigurate de particularitățile corespunzătoare ale matricelor ortogonale.

Astfel, mulțimea

$$O(V,\langle,\rangle)=\{T:(V,\langle,\rangle)\to(V,\langle,\rangle)\mid T \text{ operator ortogonal}\}$$

este grup față de operația de compunere, numit **grupul ortogonal al spațiului euclidian** $(V,\langle,\rangle)$.

Observație. Determinantul unei matrice ortogonale fiind ±1 și cum semnul determinantului matricei unui operator depinde de

baza relativ la care se asociază matricea, rezultă că există două tipuri de transformări ortogonale:

- transformări T, pentru care $\det T=1$;
- transformări T, pentru care $\det T=-1$.

Notăm cu

$$O^+(V,\langle,\rangle)=\{T:(V,\langle,\rangle)\to(V,\langle,\rangle)\mid T \text{ operator ortogonal}, \det T=1\}$$

Scanned with OKEN Scanner

mulțimea operatorilor ortogonali de speța I care este un subgrup al lui $O(V,\langle,\rangle)$ și cu

$$O^-(V,\langle,\rangle)=\{T:(V,\langle,\rangle)\to(V,\langle,\rangle)\ |T \text{ operator ortogonal}, \det T=-1\}$$

mulțimea operatorilor ortogonali de speța a II-a.

Sunt evidente proprietățile:

$$O^-(V,\langle,\rangle)\cdot O^+(V,\langle,\rangle)\subset O^-(V,\langle,\rangle)$$

și

$$O^-(V,\langle,\rangle)\cdot O^-(V,\langle,\rangle)\subset O^+(V,\langle,\rangle).$$

Propoziția 4.3.2.2. *Dacă un operator ortogonal admite valori proprii acestea sunt* ± 1.

Demonstrație. Fie λ o valoare proprie a operatorului ortogonal T și $\bar{v}$ un vector propriu corespunzător: $T\bar{v}=\lambda\bar{v}$. Atunci, $\|T\bar{v}\|=\|\bar{v}\|$ implică $\|\lambda\bar{v}\|=\|\bar{v}\|$, adică $\lambda\|\bar{v}\|=\|\bar{v}\|$ și deci $|\lambda|=1\Leftrightarrow\lambda=\pm 1$.

Scanned with OKEN Scanner

5. FORME MULTILINIARE

5.1. Forme liniare. Spaţiu dual

5.1.1. Spaţiu dual. Bază duală

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul K.

Definiţia 5.1.1.1. *Se numeşte* ***formă liniară*** *sau* ***funcţională liniară*** *pe V orice aplicaţie* $f : V \to K$ *care este liniară.*

Observaţie. În cazul în care V este finit dimensional se foloseşte denumirea de formă liniară, iar dacă e infinit dimensional, de funcţională liniară.

Definiţia 5.1.1.2. *Spaţiul vectorial* $L(V,K)$ *al tuturor formelor liniare pe V se notează* V^* *şi se numeşte* ***spaţiul dual*** *al spaţiului vectorial V.*

Numele de spaţiu dual vine de la dubla calitate a unui element din V^*: pe de o parte, conform definiţiei, un element din V^* este o formă liniară, iar pe de altă parte în momentul în care precizăm că V^* este spaţiu vectorial, un element al său este vector.

Vom considera, în cele ce urmează, doar cazul când V este finit dimensional şi fie $\dim V = n$.

Observaţie. Formele liniare pe V sunt aplicaţii liniare, aşadar toate problemele prezentate în Capitolul V în cadrul spaţiului vectorial $L(V,W)$ cu $V \neq W$ pot fi reconsiderate în acest cadru pentru $W = K$.

Dintre aceste probleme este de subliniat aceea că, o formă liniară f pe V ($f \in L(V,K) = V^*$) este cunoscută ca funcţie, ca orice aplicaţie liniară, dacă i se cunoaşte acţiunea pe vectorii unei baze din V.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, dacă $B=\{\overline{v_i}\}_n$ este o bază în V şi $\overline{x}$ este un vector oarecare din V cu $\overline{x}=x^i\overline{v_i}$ atunci

$$f(\overline{x})=f(x^i\overline{v_i})=x^i f(\overline{v_i}), i=1,2,...,n.$$

Definiția 5.1.1.3. *Dacă* $B=\{\overline{v_i}\}_n$ *este o bază în spațiul vectorial* V *şi* $f\in V^*$, *scalarii* $f(\overline{v_i}), i=1,2,...,n$ *se numesc* ***coeficienții*** *lui f relativ la baza B.*

Observație. Evident, $L(V,K)=V^*\cong M(1,n;K)$ iar $\dim K=1$;

Aşadar este de subliniat că matricea unei forme liniare f relativ la o pereche de baze este o matrice linie cu n coloane. Fie $\{\overline{\alpha}\}$ o bază în K şi să notăm $f(\overline{v_i})=\alpha_i\overline{\alpha}$; atunci formula matriceală de calcul a imaginii prin f a vectorului $\overline{x}=x^i\overline{v_i}$ adică a scalarului $f(\overline{x})=y\overline{\alpha}$ este:

$$[y]=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad ... \quad \alpha_n]\begin{bmatrix}x^1\\x^2\\\vdots\\x^n\end{bmatrix}.$$

În plus, din izomorfismul menționat este de reținut că $\dim V^*=n$, adică V şi V^* au aceeaşi dimensiune.

În continuare vom construi o bază în V^*, subliniind din nou că pentru a da un vector $f\in V^*$ este suficient să definim acțiunea acestuia pe vectorii unei baze din V.

Propoziția 5.1.1.1. *Fie* $B=\{\overline{v_i}\}_n$ *o bază a spațiului vectorial V. Sistemul de forme liniare pe V,* $B^*=\{\varepsilon^j\}_n$, *definite prin*

$$\varepsilon^j(\overline{v_i})=\delta_i^j=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$$

este o bază în V^*.

Demonstrație. B^* conține n vectori şi $\dim V^*=\dim V=n$, deci pentru a arăta că B^* este o bază, trebuie justificată doar liniar independența sa.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\alpha_j \varepsilon^j = 0, j = 1,2,...,n$ deci $\alpha_j \varepsilon^j(\bar{x}) = 0, \forall \bar{x} \in V$; în particular dacă $\bar{x} = \overline{v_i}, i = 1,2,...,n$ deducem că

$$\alpha_j \varepsilon^j(\overline{v_i}) = 0, j = 1,2,...,n$$

sistem liniar de n ecuații cu necunoscutele α_j ce este, din definiția sistemului B^* echivalent cu

$$\alpha_j = 0, i = 1,2,...,n.$$

Cum aceste soluții verifică ecuația $\alpha_j \varepsilon^j(\bar{x}) = 0, \forall \bar{x} \in V$ deducem că $\alpha_j \varepsilon^j = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0, j = 1,2,...,n$ ca unică soluție , deci B^* este liniar independent.

Definiția 5.1.1.4. *Fie $B = \{\overline{v_i}\}_n$ o bază în spațiul vectorial V. Baza $B^* = \{\varepsilon^j\}_n$ din spațiul vectorial B^* definită prin $\varepsilon^j(\overline{v_i}) = \delta_i^j$ se numește* ***baza duală*** *bazei B.*

Observație. Vectorii bazei B^* sunt aplicații liniare ale căror acțiuni ca funcții sunt ușor de determinat:

$$\varepsilon^j(\bar{x}) = \varepsilon^j(x^i \overline{v_i}) = x^i \varepsilon^j(\overline{v_i}) = x^j, j = 1,2,...,n.$$

Așadar, ε^j asociată unui vector $\bar{x} \in V$ ne dă a j-a sa coordonată în baza B.

Fie $f \in V^*$; să precizăm care sunt coordonatele sale în baza B^*, duala bazei B. Să notăm $f = \alpha_j \varepsilon^j$; atunci $\forall \bar{x} \in V$, $f(\bar{x}) = \alpha_j \varepsilon^j(\bar{x})$; pentru $\bar{x} = \overline{v_i}, i = 1,2,...,n$ deducem atunci că:

$$f(\overline{v_i}) = \alpha_j \varepsilon^j(\overline{v_i}) = \alpha_i, i = 1,2,...,n.$$

$\alpha_i = f(\overline{v_i})$ astfel determinați verifică condiția $f(\bar{x}) = \alpha_j \varepsilon^j(\bar{x})$;

$$f(\bar{x}) = f(x^i)\overline{v_i} = x^i f(\overline{v_i})$$

și

$$\alpha_j \varepsilon^j(\bar{x}) = \alpha_j \varepsilon^j(x^i \overline{v_i}) = \alpha_j x^i \varepsilon^j(\overline{v_i}) = \alpha_i x^i = f(\overline{v_i}) x^i = x^i f(\overline{v_i})$$

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Coordonatele lui $f \in V^*$ în baza B^* duala bazei B sunt în ordine, valorile lui f pe vectorii bazei B, adică $f(\overline{v_i}), i = 1,2,...,n$.

5.1.2. Schimbarea bazei în spațiul dual

Propoziția 5.1.2.1. *Fie V un spațiu vectorial peste K cu $\dim V = n$ și V^* spațiul său dual. Dacă B, B' sunt baze în V și B^*, B'^* sunt bazele duale asociate acestora, atunci:*

$T_{B^*B'^*} = (T^t_{BB'})^{-1}$.

Demonstrație. Fie $B = \{\overline{v_i}\}_n$, $B' = \{\overline{v'_i}\}_n$ cele două baze din V și $B^* = \{\varepsilon^j\}_n$ respectiv $B'^* = \{\varepsilon'^j\}_n$ bazele duale corespunzătoare.

Să notăm $\overline{v_i} = \alpha^j_i \overline{v'_j}$, adică $T_{B'B} = \left[\alpha^j_i\right]$ și $\varepsilon'^j = \beta^j_i \varepsilon^i$ adică

$T_{B^*B'^*} = \{\beta^j_i\}, i, j = 1,2,...,n$.

Așadar, $\varepsilon^j(\overline{v_i}) = \delta^j_i, \varepsilon'^j(\overline{v'_i}) = \delta^j_i$.

Deoarece coordonatele unui vector din V^* în baza B^* sunt valorile sale pe vectorii bazei B avem că:

$\beta^j_i = \varepsilon'^j(\overline{v_i})$

sau

$\beta^j_i = \varepsilon'^j(\alpha^k_i \overline{v'_k}) = \alpha^k_i \varepsilon'^j(\overline{v'_k}) = \alpha^j_i$.

Deci

$T_{B^*B'^*} = T^t_{B'B} = (T^{-1}_{BB'})^t = (T^t_{BB'})^{-1}$.

Observație. Din definiția matricei de trecere de la o bază la alta deducem că în matricea $T_{B'B} = [\alpha^j_i]$ pentru elementul α^j_i, i este indice de coloană, iar j, indice de linie.

În plus, pentru a putea folosi convenția de sumare a lui Einstein se observă că în V coordonatele unui vector într-o bază sunt scalari indexați superior, pa când în V^* coordonatele unui

Scanned with OKEN Scanner

vector în baza dual acesteia sunt scalari indexaţi inferior. (modul prescurtat de definire a vectorilor bazei duale a impus ca aceştia să fie indexaţi superior, adică invers ca cei ai bazei din V).

5.2. Forme biliniare pe un spaţiu vectorial. Forme pătratice.

5.2.1. Forme biliniare pe un spaţiu vectorial. Definiţie, proprietăţi

Fie V un spaţiu vectorial de dimensiune n peste corpul K.

Definiţia 5.2.1.1. *O aplicaţie* $\phi: V \times V \to K$ *este o* ***formă biliniară*** *pe V dacă:*

1) a) $\phi(\bar{x}+\bar{y},\bar{z}) = \phi(\bar{x},\bar{z}) + \phi(\bar{y},\bar{z}),\ \forall \bar{x},\bar{y},\bar{z} \in V$;

b) $\phi(\bar{x},\bar{y}+\bar{z}) = \phi(\bar{x},\bar{y}) + \phi(\bar{x},\bar{z}),\ \forall \bar{x},\bar{y},\bar{z} \in V$;

2) a) $\phi(\alpha\bar{x},\bar{y}) = \alpha\phi(\bar{x},\bar{y}),\ \forall \alpha \in K, \bar{x},\bar{y} \in V$;

b) $\phi(\bar{x},\alpha\bar{y}) = \alpha\phi(\bar{x},\bar{y})\ ,\ \forall \alpha \in K, \bar{x},\bar{y} \in V$.

Observaţie. Dacă aplicaţia φ satisface 1) se spaune că este **aditivă** în raport cu ambele argumente; dacă φ satisface 2) se spune că este **omogenă** în raport cu ambele argumente.

Propoziţia 5.2.1.1. *O aplicaţie* $\varphi: V \times V \to K$ *este o formă biliniară pe V dacă şi numai dacă:*

I) $\varphi(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y},\bar{z}) = \alpha\varphi(\bar{x},\bar{z}) + \beta\varphi(\bar{y},\bar{z})$;

II) $\varphi(\bar{x},\alpha\bar{y}+\beta\bar{z}) = \alpha\varphi(\bar{x},\bar{y}) + \beta\varphi(\bar{x},\bar{z}), \forall \alpha,\beta \in K, \bar{x},\bar{y},\bar{z} \in V$.

Demonstraţie. Dacă φ este o formă biliniară pe V, atunci din Definiţia 2.1.1 avem că:

$$\varphi(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y},\bar{z}) = \varphi(\alpha\bar{x},\bar{z}) + \varphi(\beta\bar{y},\bar{z}) = \alpha\varphi(\bar{x},\bar{z}) + \beta\varphi(\bar{y},\bar{z}),\ \forall \alpha,\beta \in K, \bar{x},\bar{y},\bar{z} \in V$$

şi

$$\varphi(\bar{x},\alpha\bar{y}+\beta\bar{z}) = \varphi(\bar{x},\alpha\bar{y}) + \varphi(\bar{x},\beta\bar{z}) = \alpha\varphi(\bar{x},\bar{y}) + \beta\varphi(\bar{x},\bar{z}),\ \forall \alpha,\beta \in K, \bar{x},\bar{y},\bar{z} \in V.$$

Scanned with OKEN Scanner

Reciproc, din I) pentru $\alpha=\beta=1$ rezultă 1) a) şi tot din I) pentru $\forall\alpha\in K$ şi $\beta=0$ rezultă 2) a). Din II) pentru $\alpha=\beta=1$ rezultă 1) b) iar pentru $\forall\alpha\in K$ şi $\beta=0$ rezultă 2) b).

O formă biliniară φ pe V se spune că este **liniară în raport cu ambele argumente.**

Observaţie. Fie $B(V\times V,K)$ mulţimea tuturor formelor biliniare pe V. Se verifică uşor că dacă $\varphi_1,\varphi_2\in B(V\times V,K)$ iar dacă $\alpha\in K$ atunci $\varphi_1+\varphi_2\in B(V\times V,K)$ şi $\alpha\varphi_1\in B(V\times V,K)$.

Verificând efectiv axiomele spaţiului vectorial rezultă că adunarea formelor biliniare şi înmulţirea unei forme biliniare cu un scalar din K conferă mulţimii $B(V\times V,K)$ o structură de spaţiu vectorial peste corpul K.

Propoziţia 5.2.1.2. *Fie* $B=\{\overline{v_i}\}_n$ *o bază în V. Forma biliniară* $:V\times V\to K$ *este unic determinată de valorile sale* $a_{ij}=(\overline{v_i},\overline{v_j})$ *pe produsul cartezian* $B\times B$.

Demonstraţie. Fie $\overline{x},\overline{y}\in V$ doi parametri arbitrari şi să notăm $\overline{x}=x^i\overline{v_i}$ şi $\overline{y}=y^j\overline{v_j}$. Atunci, prin aplicarea repetată de n ori a proprietăţilor sale I) şi II) din Propoziţia 6.2.1.1, deducem că:

$$(\overline{x},\overline{y})=(x^i\overline{v_i},y^j\overline{v_j})=x^iy^j\,(\overline{v_i},\overline{v_j})=a_{ij}x^iy^j$$

deci φ e cunoscută ca aplicaţie dacă sunt cunoscuţi scalarii

$$(\overline{v_i},\overline{v_j}),i,j=1,2,\ldots,n.$$

Pentru demonstrarea unicităţii formei φ astfel precizată să presupunem că există $\psi\in B(V\times V,K)$ astfel încât

$$\psi(\overline{v_i},\overline{v_j})=(\overline{v_i},\overline{v_j}),i,j=1,2,\ldots,n.$$

Atunci:

$$\psi(\overline{x},\overline{y})=\psi(x^i\overline{v_i},y^j\overline{v_j})=x^iy^j\psi(\overline{v_i},\overline{v_j})=x^iy^j(\overline{v_i},\overline{v_j})=(\overline{x},\overline{y})$$

adică $\psi=\varphi$.

Observaţie. Ca şi aplicaţiile liniare, formele biliniare pe un spaţiu vectorial sunt aplicaţii a căror acţiune este cunoscută dacă ea

Scanned with OKEN Scanner

este precizată pe un număr finit de argumente şi anume pe toate perechile de vectori ai unei baze a spaţiului vectorial dat.

Definiţia 5.2.1.2. *Dacă* $B=\{\overline{v_i}\}_n$ *este o bază în spaţiul vectorial V, iar* φ *este o formă biliniară pe V, scalarii* $a_{ij}=(\overline{v_i},\overline{v_j})$ *se numesc* ***coeficienţii relativ la baza B ai formei*** ϕ.

Evident, $A_B \in M(n,n,K)$.

Fiind date matricea A_B a formei biliniare φ pe V, φ este determinată ca aplicaţie, iar expresia analitică a lui φ se obţine utilizând

Propoziţia 5.2.1.3. *Fie* $\varphi: V\times V\to K$ *o formă biliniară pe V,* $B=\{\overline{v_i}\}_n$ *o bază în V şi* A_B *matricea formei biliniare* φ *relativ la baza B.*

Notând prin X_B şi Y_B matricele coloană ale coordonatelor în baza B ale vectorilor $\overline{x},\overline{y}\in V$, avem:

$$[\varphi(\overline{x},\overline{y})]=X_B^t A_B Y_B \qquad (5.2.1.1)$$

Demonstraţie. Fie $\overline{x}=x^i\overline{v_i}$, $\overline{y}=y^j\overline{v_j}$ şi $A_B=[a_{ij}]$.

$$(\overline{x},\overline{y})=(x^i\overline{v_i},y^j\overline{v_j})=x^i\,(\overline{v_i},\overline{v_j})y^j=x^i a_{ij}y^j$$

adică, matriceal,

$$[\varphi(\overline{x},\overline{y})]=X_B^t A_B Y_B .$$

Teorema 5.2.1.1. (de reprezentare matriceală a unei forme biliniare pe *V*). *Spaţiul vectorial* $B(V\times V,K)$ *este izomorf cu spaţiul vectorial* $M(n,n,K)$.

Demonstraţie. Fie $B=\{\overline{v_i}\}_n$ o bază în V; deoarece forma biliniară φ pe V este unic determinată de matricea sa A_B relativă la baza B, rezultă imediat că aplicaţia

$$F: B(V\times V,K)\to M(n,n,K)$$

definită prin $F(\varphi)=A_B$ este o bijecţie. Liniaritatea acestei aplicaţii se verifică şi ea uşor.

Observaţie. $\dim B(V\times V,K)=n^2$.

Scanned with OKEN Scanner

Prin următoarea afirmație este dată o rețetă de construcție a unei baze în spațiul vectorial $B(V\times V,K)$.

Propoziția 5.2.1.4. *Fie* $B=\{\overline{v_i}\}_n$ *o bază în spațiul vectorial* V. *Formele biliniare* $\overline{v^i}\otimes\overline{v^j}(\overline{v_k},\overline{v_l})=\delta^i_k\delta^j_l, i,j,k,l=1,2,...,n$ *formează o bază a spațiului vectorial* $B(V\times V,K)$ *numită* ***bază asociată bazei B.***

Demonstrație. Deoarece sistemul de vectori considerat conține n^2 elemente, pentru a verifica că el este o bază în $B(V\times V,K)$ este suficient să verificăm că este liniar independent.

Din egalitatea $\alpha_{ij}\overline{v^i}\otimes\overline{v^j}=0$ deducem că

$$\alpha_{ij}\overline{v^i}\otimes\overline{v^j}(\overline{v_k},\overline{v_l})=0(\overline{v_k},\overline{v_l}),\ \forall k,l=1,2,...,n$$

adică $\alpha_{ij}\delta^j_k\delta^j_l=0$, de unde rezultă că $\alpha_{kl}=0$, $\forall k,l=1,2,...,n$.

Observație. Coordonatele formei biliniare $\varphi\in B(V\times V,K)$ în baza asociată bazei B sunt chiar coeficienții săi în baza B; într-adevăr dacă notăm

$$\varphi=\beta_{ij}\overline{v^i}\otimes\overline{v^j}\ \text{ şi }\ \overline{x}=x^k\overline{v_k},\ \ \overline{y}=y^l\overline{v_l}$$

obținem că

$$\varphi(\overline{x},\overline{y})=\beta_{ij}\overline{v^i}\otimes\overline{v^j}(\overline{x},\overline{y})$$

sau

$$\varphi(x^k\overline{v_k},y^l\overline{v_l})=x^ky^l\varphi(\overline{v_k},\overline{v_l})=\beta_{ij}\overline{v^i}\otimes\overline{v^j}(x^k\overline{v_k},y^l\overline{v_l})=$$

$$=\beta_{ij}x^ky^l\overline{v^i}\otimes\overline{v^j}(\overline{v_k},\overline{v_l})=\beta_{ij}x^ky^l\delta^i_k\delta^j_l=x^ky^l\beta_{kl},$$

deci $\beta_{ij}=\varphi(\overline{v_i},\overline{v_j})$.

Propoziția 5.2.1.5. *Dacă* $\phi\in B(V\times V,K)$, $T_{BB'}$ *este matricea de trecere de la baza* $B=\{\overline{v_i}\}_n$ *la baza* $B'=\{\overline{v'_i}\}_n$ *şi* A_B, $A_{B'}$ *sunt matricele lui* φ *corespunzătoare bazelor* B *respectiv* B', *atunci:*

$$A_{B'}=T^t_{BB'}A_BT_{BB'}\qquad(5.2.1.2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Fie $X_B, X_{B'}, Y_B, Y_{B'}$ matricele coloană alcătuite cu coordonatele vectoilor $\bar{x}, \bar{y} \in V$ în baza B respectiv B'. Atunci:

$$X_B = T_{BB'} X_{B'} \text{ și } Y_B = T_{BB'} Y_{B'}$$

și din (7.2.1.1) deducem că

$$[\varphi(\bar{x}, \bar{y})] = X_B^t A_B Y_B = (T_{BB'} X_{B'})^t A_B T_{BB'} Y_{B'} = X_{B'}^t (T_{BB'} A_B T_{BB'}) Y_B$$

și deci

$$[\phi(\bar{x}, \bar{y})] = X_{B'}^t A_{B'} Y_{B'}.$$

Deoarece $\bar{x}, \bar{y} \in V$ sunt arbitrari și matricea $A_{B'}$ este unic determinată rezultă că

$$A_{B'} = T_{BB'}^t A_B T_{BB'}.$$

Definiția 5.2.1.3. O formă biliniară $\varphi \in B(V \times V, K)$ se numește **simetrică** dacă $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\bar{y}, \bar{x}), \forall \bar{x}, \bar{y} \in V$ și **antisimetrică** dacă $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = -\varphi(\bar{y}, \bar{x}), \forall \bar{x}, \bar{y} \in V$.

Deoarece formele biliniare simetrice pe V vor fi în mod special considerate în cele ce urmează, facem pentru ele următoarea

Observație. Dacă $\varphi \in B(V \times V, K)$ este simetrică, matricea sa corespunzătoare oricărei baze $B = \{\bar{v}_i\}_n$ din V este o matrice simetrică și reciproc.

Într-adevăr dacă alegem $\bar{x}, \bar{y} \in V$ doi vectori arbitrari și notăm $\bar{x} = x^i \bar{v}_i$ și $\bar{y} = y^j \bar{v}_j$ avem că

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(x^i \bar{v}_i, y^j \bar{v}_j) = x^i y^j \varphi(\bar{v}_i, \bar{v}_j) = a_{ij} x^i y^j$$

și

$$\varphi(\bar{y}, \bar{x}) = y^j x^i \varphi(\bar{v}_j, \bar{v}_i) = a_{ji} x^i y^j.$$

Evident, $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\bar{y}, \bar{x})$ dacă și numai dacă

$$a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1,2,...,n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 5.2.1.4. *Fiind dată forma* $\varphi \in B(V \times V, K)$, *forma* $sim\varphi \in B(V \times V, K)$ *cu*

$$(sim\varphi)(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{\varphi(\overline{x}, \overline{y}) + \varphi(\overline{y}, \overline{x})}{2}, \forall \overline{x}, \overline{y} \in V$$

se numeşte ***simetrizata*** *formei* φ, *iar forma*

$$(alt\varphi)(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{\varphi(\overline{x}, \overline{y}) - \varphi(\overline{y}, \overline{x})}{2}, \forall \overline{x}, \overline{y} \in V$$

se numeşte ***alternata*** *formei* φ.

Observație. Deoarece o combinație liniară de elemente din $B(V \times V, K)$ este tot o formă biliniară, este de subliniat că $sim\varphi$ şi $alt\varphi$ sunt într-adevăr forme biliniare pe V. În plus, dacă $\varphi \in B(V \times V, K)$ este o formă biliniară simetrică se verifică cu uşurință că $sim\varphi = \varphi$ iar dacă φ este antisimetrică atunci $alt\varphi = \varphi$.

Propoziția 5.2.1.6. *Dacă* $\varphi \in B(V \times V, K)$ *are corespunzător bazei* $B = \{\overline{v_i}\}_n$ *coeficienții* $a_{ij}, i, j = 1,2,...,n$ *atunci:*

1) $sim\varphi$ *are corespunzător bazei B coeficienții*

$$\sigma_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}, i, j = 1,2,...,n,$$

iar

2) $alt\varphi$ *are corespunzător bazei B coeficienții*

$$\alpha_{ij} = \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}, i, j = 1,2,...,n.$$

Demonstrație.

$$1)\ \sigma_{ij} = (sim\varphi)(\overline{v_i}, \overline{v_j}) = \frac{\varphi(\overline{v_i}, \overline{v_j}) + \varphi(\overline{v_j}, \overline{v_i})}{2} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}, i, j = 1,2,...,n.$$

$$2)\ \alpha_{ij} = (alt\varphi)(\overline{v_i}, \overline{v_j}) = \frac{\varphi(\overline{v_i}, \overline{v_j}) - \varphi(\overline{v_j}, \overline{v_i})}{2} = \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}, i, j = 1,2,...,n.$$

Scanned with OKEN Scanner

5.2.2. Forme pătratice

Definiția 5.2.2.1. *Fiind dată o formă iliniară simetrică pe V se numește* ***formă pătratică*** *asociată formei biliniare* φ *o aplicație* $f:V\to K$ *definită prin* $f(\bar{x})=\varphi(\bar{x},\bar{x})$; *forma biliniară simetrică* φ *se numește* ***polara*** *formei pătratice f.*

Observație. Din definiția dată deducem că orice formă biliniară simetrică pe V definește o unică formă pătratică asociată ei; reciproc, dacă forma pătratică $f:V\to K$ este dată, forma biliniară simetrică $\varphi:V\times V\to K$, pentru care f este forma pătratică asociată, poate fi reconstruită ca aplicație.

Propoziția 5.2.2.1. *Polara* $\varphi:V\times V\to K$ *a formei pătratice date* $f:V\to K$ *este determinată ca funcție prin:*

$$\varphi(\bar{x},\bar{y})=\frac{f(\bar{x}+\bar{y})-f(\bar{x})-f(\bar{y})}{2}.$$

Demonstrație. Avem că

$$f(\bar{x}+\bar{y})=\varphi(\bar{x}+\bar{y},\bar{x}+\bar{y})=f(\bar{x})+f(\bar{y})+2\varphi(\bar{x},\bar{y})$$

de unde

$$\varphi(\bar{x},\bar{y})=\frac{f(\bar{x}+\bar{y})-f(\bar{x})-f(\bar{y})}{2}.$$

Așadar, corespondența $\varphi\to f$ este biunivocă ceea ce permite să dăm următoarea definiție.

Definiția 5.2.2.2. *Se numește* ***matricea în baza B*** *a formei pătratice f, matricea în baza B a formei biliniare simetrice* φ *pe V, a cărei formă pătratică asociată este f.*

Observație. Din această definiție, utilizând formula (5.2.1.1) și definiția formei pătratice, deducem că aceasta poate fi precizată ca aplicație dacă i se cunoaște matricea A_B într-o bază și anume

$$[f(\bar{x})]=[\varphi(\bar{x},\bar{x})]=X_B^t A_B X_B \quad (5.2.2.1)$$

De subliniat este faptul că A_B este o matrice simetrică.

Scanned with OKEN Scanner

Din definiția formei pătratice f, deducem că fixată în B, o bază $B = \{\overline{v_i}\}_n$, $\forall \overline{x} = x^i \overline{v_i} \in V$ expresia analitică a lui f este:

$$f(\overline{x}) = f(x^i \overline{v_i}) = \varphi(x^i \overline{v_i}, x^j \overline{v_j}) = x^i x^j \varphi(\overline{v_i}, \overline{v_j})$$

adică este o sumă de produse de câte două coordonate ale lui $\overline{x}$ în baza B, coeficientul produsului $x^i x^j$ find $\varphi(\overline{v_i}, \overline{v_j}) \in K$.

Dacă notăm $a_{ij} = \varphi(\overline{v_i}, \overline{v_j})$, deoarece $a_{ij} = a_{ji}$ avem că:

$$\begin{aligned} f(\overline{x}) &= a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + \ldots + 2a_{1n}x^1x^n + a_{22}(x^2)^2 + \\ &+ 2a_{23}x^2x^3 + \ldots + 2a_{2n}x^2x^n + \\ &+ a_{33}(x^3)^2 + 2a_{34}x^3x^4 + \ldots + 2a_{3n}x^3x^n + \ldots + a_{nn}(x^n)^2 \end{aligned} \qquad (5.2.2.2)$$

Dacă baza B din V este astfel încât $a_{ij} = 0, \forall i \neq ji, j = 1,2,\ldots,n$ adică

$$f(\overline{x}) = a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + \ldots + a_{nn}(x^n)^2 \quad (5.2.2.2')$$

spunem căf are corespunzător bazei B o formă (analitică) canonică.

Evident, în această situație, matricea lui f corespunzătoare bazei B este o matrice diagonală.

Următoarea teoremă asigură existența dar nu şi unicitatea unei baze în V corespunzător căreia forma pătratică oarecare f are o formă canonică.

Teorema 5.2.2.1. (a lui Gauss). *Pentru orice formă pătratică f pe V există în V o bază corespunzător căreia f are o formă (analitică) canonică.*

Demonstrație. Demonstrația constă în precizarea unui algoritm de construcție a unei baze corespunzător căreia expresia analitică a lui f să aibă o formă canonică, ilustrându-se şi modul în care se ajunge la această formă.

Să presupunem că forma pătratică f are corespunzător bazei $B = \{\overline{v_i}\}_n$ forma analitică (5.2.2.2).

Vom distinge în descrierea algoritmului două cazuri:

Scanned with OKEN Scanner

Cazul1. Să presupunem că în expresia (5.2.2.2) apare pătratul unei coordonate, de exemplu (fără a restrânge generalitatea) x^1 adică $a_{11} \neq 0$. Prima etapă a algoritmului constă în:

- notăm cu $\alpha = a_{12}x^2 + ...a_{1n}x^n$;
- scoatem în factor $\frac{1}{a_{11}}$ pentru toți termenii ce conțin pe x^1;
- adunând şi scăzând termenii necesari, construim cu termenii ce conțin pe x^1 un pătrat perfect.

Obținem astfel:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x^1 + \alpha)^2 - \frac{1}{a_{11}}\alpha^2 + g(x^1,...,x^n),$$

unde g este de forma pătratică în coordonatele $x^2,...,x^n$:

$$g(x^2,...,x^n) = a_{22}(x^2)^2 + 2a_{23}x^2x^3 + ... + 2a_{2n}x^2x^n +$$
$$+ a_{33}(x^3)^2 + 2a_{34}x^3x^4 + ... + a_{nn}(x^n)^2.$$

Să scriem acum expresia formei pătratice f într-o altă bază, bază corespunzătoare căreia vectorul $\bar{x}$ are coordonatele $y^1,...,y^n$ şi care este perfect definită dându-se formulele ce leagă coordonatele vectorului $\bar{x}$ în noua bază de cele în baza B:

$$\begin{cases} y^1 = a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + ... + a_{1n}x^n \\ y^2 = x^2 \\ \vdots \\ y^n = x^n \end{cases}$$

(matricea de trecere de la baza B la noua bază este matreicea sistemului dat ca sistem în $x^1,...,x^n$ şi este nesingulară fiind o

Scanned with OKEN Scanner

matrice supradiagonală cu elemente nenule pe diagonala principală).

Corespunzător noii baze, expresia analitică a lui f este:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{a_{11}}(y^1)^2 + h(y^2,...,y^n) \quad (5.2.2.3)$$

cu h o formă pătratică în coordonatele $y^1,...,y^n$.

Cazul 2. Dacă în expresia (5.2.2.2) a lui f nu apare pătratul nici unei coordonate, adică $a_{ii} = 0, i = 1,2,...,n$ vom preciza, în aceeaşi mabieră ca mai sus o bază în B corespunzător căreia expresia analitică a lui f conține pătratul cel puțin unei coordonate, adică suntem în *Cazul 1.*

Evident, dacă $f \neq 0$, există cel puțin un termen în expresia lui f ce este nenul, de exemplu (fără a restrânge generalitatea) $a_{12} \neq 0$. Facem schimbarea de bază definită de:

$$\begin{cases} z^1 = x^1 + x^2 \\ z^2 = x^1 - x^2 \\ z^3 = x^3 \\ \vdots \\ z^n = x^n \end{cases}$$

(aceste formule definesc într-adevăr o schimbare de baze, întrucât matricea sistemului, privit ca sistem în $x^1,...,x^n$ este nesingulară.

Corespunzător noii baze, baza în care coordonatele lui $\bar{x}$ sunt notate $z^1,...,z^n$, expresia analitică a lui f este:

$$f(\bar{x}) = 2a_{12}(z^1)^2 - 2a_{12}(z^2)^2 + ... + a_{n-1,n}z^{n-1}z^n.$$

În această expresie a lui f apare pătratul unei coordonate şi ca atare, conform celor prezentate în *Cazul 1* se face prima etapă a algoritmului.

Scanned with OKEN Scanner

În continuare, algoritmul constă în repetarea raționamentului din prima etapă, pentru forma pătratică în $n-1$ variabile nou obținută.

Evident, prin aplcarea repetată a acestui raționament de cel mult n ori, adică prin schimbări repetate de baze de tipul celei descrise în *Cazul 1* sau în *Cazul 2* se obține în final o bază în V, corespunzător căreia f are o formă canonică.

În cazul unor forme pătratice speciale pe V vom prezenta un rezultat analog cu cel de mai sus şi anume:

Teorema 5.2.2.2. (a lui Jacobi). *Fie forma pătratică* $f:V\to K$ *având corespunzător bazei* $B=\{\overline{v_i}\}_n$ *expresia analitică*

$$f(\overline{x})=a_{ij}x^i x^j$$

cu toți determinanții

$$\Delta_1=|a_{11}|,\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\ldots,\Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

nenuli. Atunci în V există o bază $B'=\{\overline{v'_i}\}_n$ *corespunzător căreia f are forma canonică:*

$$f(\overline{x})=\frac{1}{\Delta_1}(y^1)^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}(y^2)^2+\ldots+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(y^n)^2 \qquad (6.2.2.4)$$

cu $\overline{x}=y^i\overline{v'_i}$.

Demonstrație. Vom arăta că baza B' poate fi unic determinată de formulele de tipul:

$$\begin{cases}\overline{v'_1}=\alpha_1^1\overline{v_1}\\ \overline{v'_2}=\alpha_2^1\overline{v_1}+\alpha_2^2\overline{v_2}\\ \vdots\\ \overline{v'_n}=\alpha_n^1\overline{v_1}+\ldots+\alpha_n^n\overline{v_n}\end{cases}$$

adică $T_{BB'}$ este o matrice supradiagonală.

Scanned with OKEN Scanner

Să notăm cu φ forma biliniară simetrică din care provine f; atunci

$$a_{ij} = \varphi(\overline{v_i}, \overline{v_j}).$$

Baza B' trebuie determinată astfel ca $\varphi(\overline{v'_i}, \overline{v'_j}) = 0$ pentru $i \neq j, i, j = 1,1,...,n$ şi cum φ este simetrică, aceste condiţii sunt echivalente cu $\varphi(\overline{v'_i}, \overline{v'_j}) = a'_{ij} = 0, j < i, i, j = 1,2,...,n$.

Vom justifica acum că aceste condiţii completate cu condiţia ca forma canonică să fie (5.2.2.4) reprezintă un sistem compatibil determinat în necunoscutele α_k^l şi $\alpha_k^k, k = 1,2,...,n$.

Ecuaţiile $a'_{ij} = 0, j < i, i, j = 1,2,...,n$ sunt echivalente cu:

$$\varphi(\overline{v'_i}, \alpha_j^1 \overline{v_1} + ... + \alpha_j^j \overline{v_j}) = 0; i, j = 1,2,...,n; j < i$$

sau $\alpha_j^k \varphi(\overline{v'_i}, \overline{v_k}) = 0; k = 1,2,...,i-1; i = 1,2,...,n$.

Evident, membrii stângi ai ecuaţiilor precizate sunt polinoame nule în variabilele α_j^k corespunzătoare, deci are coeficienţii nuli:

$$\varphi(\overline{v'_i}, \overline{v_k}) = 0; k = 1,2,...,i-1; i = 1,2,...,n$$

adică $\varphi(\alpha_i^j \overline{v_j}, \overline{v_k}) = 0$ sau $\alpha_i^j \varphi(\overline{v_j}, \overline{v_k}) = 0$

Deci $\alpha_{ij} a_{jk} = 0; j < i; k = 1,2,...,i-1; i, j = 1,2,...,n$ sau

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_i^1 + a_{12}\alpha_i^2 + ... + a_{1i}\alpha_i^i = 0 \\ a_{21}\alpha_i^1 + a_{22}\alpha_i^2 + ... + a_{2i}\alpha_i^i = 0 \\ \vdots \\ a_{i-1,1}\alpha_i^1 + a_{i-1,2}\alpha_i^2 + ... + a_{i-1,i}\alpha_i^i = 0 \end{cases}$$

cu $i = 1,2,...,n$.

Sistemul astfel precizat pentru un i fixat conţine mai puţine ecuaţii decât necunoscutele α_i^j căutate.

Scanned with OKEN Scanner

Îi vom adăuga o ecuație remarcând apoi în cele ce urmează că aceasta asigură pentru f forma canonică (5.2.2.4) corespunzătoare bazei B'.

Condiția suplimentară pentru i fixat este:

$$\varphi(\overline{v'_i}, \overline{v_i}) = 1; i = 1,2,...,n.$$

Sistemul neomogen aşa scris pentru i fixat este evident compatibil determinat în necunoscutele $\alpha_i^1,...,\alpha_i^i$ deoarece determinantul său este $\Delta_i \neq 0$ şi $\alpha_i^i = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \neq 0; i = 1,2,...,n$.

Să determinăm acum coeficienții $\varphi(\overline{v'_i}, \overline{v_i})$ ai formei f corespunzătoare bazei B' astfel alese:

$$a'_{ii} = \varphi(\overline{v'_i}, \overline{v'_i}) = \varphi(\overline{v'_i}, \alpha_i^j \overline{v_j}) = \alpha_i^j \varphi(\overline{v'_i}, \overline{v_j}) = \alpha_i^i = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}.$$

Pentru i =1 avem:

$$a'_{11} = \varphi(\overline{v'_1}, \overline{v'_1}) = \varphi(\overline{v'_1}, \alpha_1^1 \overline{v_1}) = \alpha_1^1 \varphi(\overline{v_1}, \overline{v_1}) = \alpha_1^1 a_{11}.$$

Deci

$$a'_{11} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{\Delta_1} \text{ şi } \alpha_i^1 \neq 0.$$

Aşadar, în baza B' determinată, forma pătratică f are forma canonică (5.2.2.4).

În continuare vom studia cazul special al formelor pătratice pe un spațiu vectorial real, ilustrând şi rolul teoremelor lui Gauss şi Jacobi în acest studiu.

Fie V un spațiu vectorial n-dimensional real.

Definiția 5.2.2.3. *Forma pătratică* $f: V \to R$ *este :*

1. ***pozitiv definită*** *dacă* $f(\overline{x}) > 0, \forall \overline{x} \in V, \overline{x} \neq 0$;
2. ***negativ definită*** *dacă* $f(\overline{x}) < 0, \forall \overline{x} \in V, \overline{x} \neq 0$;
3. ***nedefinită ca semn*** *dacă* $\exists \overline{x}, \overline{y} \in V$ *aşa încât* $f(\overline{x}) > 0$ *şi* $f(\overline{y}) < 0$.

Observație. Din forma analitică generală (5.2.2.2) a unei forme pătratice, deducem că $f(\overline{0_V}) = 0$, vectorul nul având în orice

Scanned with OKEN Scanner

bază din V coordonate nule. Acesta este motivul omiterii vectorului nul în enunțul Definiției 5.2.2.3.

De asemenea este clar că existența unei baze în V în care f are o formă analitică canonică şi stabilirea corespunzător acelei baze a formei canonice respective (o sumă algebrică de pătrate cu coeficienți reali), este modalitatea prin care în modul cel mai rapid se poate decide dacă f este pozitiv sau negativ definită. Această decizie are urmări importante în anumite capitole ale anaizei matematice.

Desigur că o dată o formă canonică (5.2.2.2') stabilită pentru f, dacă în aceasta toți cei n coeficienți sunt strict pozitivi, f este pozitiv definită etc.

Se pune însă problema, dacă această decizie nu este dependentă de forma canonică aleasă pentru f, adică de alegerea corespunzător căreia se scrie expresia analitică a lui f.

Următoarea teoremă dă răspuns negativ problemei puse mai sus.

Teorama 5.2.2.3. (legea inerției a lui Sylvester). *Numărul coeficienților strict pozitivi şi numărul coeficienților strict negativi dintr-o formă canonică a unei forme pătratice cu valori reale nu depinde de baza corespunzător căreia f are forma canonică respectivă.*

Demonstrație. Să presupunem, evident fără a restrânge generalitatea, că în baza $B = \{\overline{v_i}\}_n$ forma pătratică $f : V \to R$ are forma canonică

$$f(\overline{x}) = (x^1)^2 + ... + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - ... - (x^{p+q})^2$$

cu $\overline{x} = x^i \overline{v_i}$ iar în baza $B' = \{\overline{v'_i}\}_n$, f are forma canonică

$$f(\overline{x}) = (y^1)^2 + ... + (y^r)^2 - (y^{r+1})^2 - ... - (y^{r+q})^2$$

cu $\overline{x} = y^i \overline{v'_i}$.

Să presupunem că $p \neq r$, de exemplu $p > r$, cazul $p < r$ tratându-se analog.

Scanned with OKEN Scanner

Fie S_1 subspaţiul generat de sistemul $\{\overline{v_1},...,\overline{v_p}\}$ şi S_2 subspaţiul generat de sistemul $\{\overline{v'_{r+1}},...,\overline{v'_n}\}$. Din $S_1 \cup S_2 \subset V$ rezultă că $\dim S_1 \cup S_2 \leq n$ şi din

$$\dim S_1 \cup S_2 = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) \leq n$$

rezultă că

$$p + n - r - \dim(S_1 \cap S_2) \leq n$$

adică

$$\dim(S_1 \cap S_2) \geq p - r > 0 .$$

Aşadar $S_1 \cap S_2 \neq \{\overline{0_V}\}$ şi deci există $x_0 \in S_1 \cap S_2$ adică există $\beta^m \in K, m = 1,2,...,p$ şi $\gamma^l \in K, l = p+1,...,n$ nu toţi nuli astfel ca:.

$$\overline{x_0} = \beta^m \overline{v_m} \text{ şi } \overline{x_0} = \gamma^l \overline{v_l} .$$

Din cele două forme canonice precizate pentru f deducem respectiv:

$$f(\overline{x_0}) = (\beta^1)^2 + ... + (\beta^p)^2 > 0$$

şi

$$f(\overline{x_0}) = -[(\gamma^{r+1})^2 + ... + (\gamma^{r+s})^2] \leq 0 .$$

A doua expresie de calcul a lui $f(\overline{x_0})$ poate lua şi valoarea zero şi anume atunci când $\gamma^{r+1} = ... = \gamma^{r+s} = 0$ şi nu toţi scalarii $\gamma^{r+s+1},...,\gamma^n$ sunt nuli.

Astfel din ipoteza $r \neq p$ am ajuns la contradicţia că există $\overline{x_0} \in V$ aşa ca $f(\overline{x_0}) > 0$ şi $f(\overline{x_0}) < 0$, deci $r = p$.

Considerând forma pătratică $g : V \to K, g = -f$, coeficienţii strict negativi dintr-o expresie canonică a lui f devin strict pozitivi pentru forma g şi repetând raţionamentul precedent se deduce că $q = s$.

Observaţie. Din teorema precedentă deducem că numărul coeficienţilor nuli din forma canonică a unei forme pătratice cu valori reale este de asemenea independent de baza corespunzătoare căreia forma pătratică are acea formă canonică.

Scanned with OKEN Scanner

6. APLICAȚII PROPUSE

1. Să se aducă matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$ la forma diagonală şi apoi să se găsească rangul matricei A.

2. Să se calculeze inversa matricei $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ prin transformarea în matrice diagonală.

3. Să se determine rangul matricei $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

4.Care este rangul matricei $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \mu & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, în funcție de parametrul real μ ?

Scanned with OKEN Scanner

5.Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$$

prin metoda eliminării totale (Gauss – Jordan).

6.Să se determine parametrul real λ, astfel ca sistemul

$$\begin{cases} 2x + 5y + z - 2t = 0 \\ 3x + y - 3z + 4t = 0 \\ \lambda x - 6y - 4z + 2t = 0 \\ 2x - \lambda y - 2z = 0 \end{cases}$$

să admită soluții nenule şi apoi să se determine aceste soluții.

7.Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix} \\ 4X - Y = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

şiind că $X, Y \in \mathbf{M}_3(R)$.

8.Care din legile de compoziție internă definite pe R

a) $x \circ y = xy + 1$

b) $x \circ y = (x + y + xy)(2xy + 1)^{-1}$

c) $x \circ y = \alpha x + \beta y$

admit element neutru.

Scanned with OKEN Scanner

9.Verificați dacă legile de compunere a funcțiilor

a) $f = 2x^2 - 1, \quad g = x(4x^2 - 3)$

b) $f = x^2, \quad g = \cos x$

sunt comutative.

10.Pe mulțimea R definim legile de compoziție interne:

$$a * b = a + b - ab$$

$$a \circ b = a - b + 2ab$$

atunci rezolvați sistemul

$$\begin{cases} (x+3y) * 3 = -19 \\ (x-2y) \circ 2 = -22 \end{cases}$$

11. Cercetați dacă legea de compoziție internă $\circ$ definită pe R

$$x \circ y = x + y + xy$$

admite element neutru şi element simetrizabil.

12. Pe mulțimea $(0,\infty)$ definim legea de compoziție $*$ astfel $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$. Studiați proprietățile acestei legi de compoziție şi apoi rezolvați ecuația $3 * x = 5$.

13.Câte legi de compoziție se pot defini pe o mulțime M cu n elemente? Câte din acestea sunt comutative ?

14. Pe mulțimea R definim legea de compoziție

$$x * y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1).$$

Arătați că R \ {1} împreună cu operația $*$ este grup comutativ.

15.Demonstrați că mulțimea

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -7y & x-4y \end{pmatrix} \middle| \, x \neq 0, x^2 - 2^2 = 1 \right\}$$

Scanned with OKEN Scanner

împreună cu operaţia de înmulţire a matricelor formează un grup comutativ.

16.Arătaţi că legile de compoziţie internă

$$x * y = x + y - 1$$

$$x \circ y = xy - 7x - 7y + 56$$

determină pe mulţimea numerelor raţionale Q o structură de corp.

17.Verificaţi dacă mulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b \in \mathrm{Q} \right\}$ împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire a matricelor formează un corp comutativ, cu $d \in \mathrm{Z}$ un număr liber de pătrate.

18.Determinaţi automorfismele f ale corpului numerelor complexe C, cu proprietatea că $f(x) = x$, oricare ar fi $x \in \mathrm{R}$.

19.Arătaţi că mulţimea

$$A = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a,b \in \mathrm{Q}\}$$

împreună cu adunarea şi înmulţirea numerelor reale este corp comutativ.

20.Să se stabilească dacă următorii vectori sunt sau nu liniar independenţi :

a) $v_1 = (2,1,3,-1)$, $v_2 = (-1,1,-3,1)$, $v_3 = (4,5,0,0)$, $v_4 = (1,5,0,1)$
b) $v_1 = 8 - t + 7t^2$, $v_2 = 2 - t + 3t^2$, $v^3 = 1 + t - t^2$
c) $v_1 = (2,1,4)$, $v_2 = (1,2,-1)$, $v_3 = (-1,0,2)$

21.În R^3 se dau vectorii $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,1,2)$, $v_3 = (1,2,3)$. Să se arate că aceştia formează o bază şi apoi să se determine coordonatele vectorului $v = (5,-1,3)$ în această bază.

Scanned with OKEN Scanner

22.Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel ca mulţimea de vectori $v_1 = (m-1,0,1)$, $v_2 = (0,1,3)$, $v_3 = (2m,1,0)$ să formeze o bază în $\mathbf{R}^3$.

23.Arătaţi că mulţimea $D = \{g \in F \mid g$ este diferenţiabilă şi $g' = g\}$ este subspaţiu vectorial al spaţiului F.

24.În $\mathbf{R}^4$ se dau vectorii $v_1 = (1,1,4,1)$, $v_2 = (7,1,2,4)$, $v_3 = (1,8,4,1)$, $v_4 = (2,4,2,2)$, $v_5 = (1,2,-1,1)$. Care este dimensiunea subspaţiului generat de aceşti vectori ?

25.Aflaţi coordonatele vectorului $v = (3,1,-4)$ în raport cu baza $v_1 = (1,-1,0)$, $v_2 = (-4,6,-10)$, $v_3 = (-1,3,-9)$.

26.Determinaţi $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ astfel ca matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ \beta & -2 \end{pmatrix}$$

să fie liniar dependenti.

27. Să se arate că următoarele aplicaţii sunt operatori liniari :

a) $A: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $A(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 + x_2, 4x_3)$;

b) $A: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $A(x_1,x_2) = (2x_1 + x_2, 3x_2, x_2 - 4x_1)$;

c) $A: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $A(x_1,x_2) = (x_1, 3x_1 - x_2, 2x_1)$.

28. Să se cerceteze dacă operatorul liniar

$$T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, T(x_1,x_2) = (x_1 - 2x_2, x_2 - x_1)$$

este inversabil şi să se determine inversul său. Este inversul tot operator liniar?

29. Să se arate că aplicaţia $A: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $A(x) = (x_1 + 2, x_2, x_3)^T$ nu este operator liniar.

Scanned with OKEN Scanner

30. Fie operatorul

$$A:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,$$

$A(x_1,x_2,x_3) = (-x_1 + x_2 + 2x_3,\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3,\ 2x_1 + x_2 + 2x_3)$.

Să se arate că A este un izomorfism şi apoi să se calculeze $A^{-1}(0,1,2)$.

31. Aflaţi vectorii şi valorile proprii pentru operatorii matriceali

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

32. Determinaţi vectorii şi valorile proprii pentru operatorii matriceali :

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

33. Determinaţi valorile proprii, vectorii proprii şi subspaţiile proprii pentru operatorul

$$T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,$$

$$T(x) = [2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3, 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3]^T,$$

$\forall x = [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^T \in \mathbf{R}^2$.

34. Să se aducă la forma canonică, prin metoda lui Gauss următoarele forme pătratice:

a) $f(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$

b) $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

PROGRAMARE LINIARĂ

1. Mulțimi convexe

1.1. Segment vectorial

Definiția 1.1.1. *Se numește* ***segment vectorial*** *de extremități* $\bar{a}$ *şi* $\bar{b}(\in V)$ *mulțimea* $[\bar{a},\bar{b}]$ *a vectorilor spațiului V, având forma*

$$\bar{v}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b},\ \alpha+\beta=1,\ \alpha\geq 0,\beta\geq 0 \qquad (1.1.1)$$

Observăm că segmentul vectorial $[\bar{a},\bar{b}]$ îşi conține extremitățile:

$\bar{a}\in[\bar{a},\bar{b}]$, căci $\bar{v}=\bar{a}$, pentru $\alpha=1,\ \beta=0$

$\bar{b}\in[\bar{a},\bar{b}]$, căci $\bar{v}=\bar{b}$ pentru $\alpha=0,\ \beta=1$.

De asemenea, pentru $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ obținem un vector important al segmentului

$$\bar{v}=\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} \qquad (1.1.2)$$

numit **mijlocul** segmentului $[\bar{a},\bar{b}]$.

Observație. Noțiunea de segment vectorial generalizează pe cea de segment de numere reale $[\bar{a},\bar{b}](\subset R)$, căci acesta din urmă satisface condițiile din Definiția 1.1.1 pentru cazul particular al R-spațiului R(=V).

Propoziția 1.1.1. Un segment vectorial de extremități $\bar{a},\bar{b}\in V$ poate fi definit, echivalent, prin relația

Scanned with OKEN Scanner

$$[\bar{a},\bar{b}]=\{\bar{v}\in V \mid \bar{v}=\lambda\bar{a}+(1-\lambda)\bar{b},\lambda\in[0,1]\} \qquad (1.1.1')$$

Demonstrație. (1.1.1)→(1.1.1'). Punând $\alpha=\lambda$, din $\alpha+\beta=1$ deducem că $\beta=1-\lambda$, astfel că $\bar{v}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}=\lambda\bar{a}+(1-\lambda)\bar{b}$. În plus, $\alpha\geq 0$ implică $\lambda\in[0,+\infty)$, iar $\beta\geq 0$ implică $1-\lambda\geq 0$, echivalentă cu $\lambda\in(-\infty,1]$. Trebuie deci să avem $\lambda\in[0,1]$.

(1.1.1') →(1.1.1). Făcând în (1.1.1') notațiile $\lambda=\alpha$, $1-\lambda=\beta$, avem

$$\alpha+\beta=\lambda+(1-\lambda)=1$$

iar din faptul că $0\leq\lambda\leq 1$, rezultă, pe de o parte că $\alpha\geq 0$, iar pe de alta că $1-\lambda=\beta\geq 0$.

Definiția 1.1.2. *Spunem că vectorul* $\bar{v}$ ***împarte segmentul*** $[\bar{a},\bar{b}]$ ***în raportul k*** (≥ 0)*, dacă aparține segmentului și, în relația de definiție a acestuia avem* $\frac{\beta}{\alpha}=k$.

Propoziția 1.1.2. *Dacă* $\bar{v}$ *este un vector care împarte segmentul* $[\bar{a},\bar{b}]$ *în raportul k, atunci*

$$\bar{v}=\frac{\bar{a}+k\bar{b}}{1+k} \qquad (1.1.3)$$

Demonstrație. Din $\frac{\beta}{\alpha}=k$ obținem, succesiv, relațiile

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{k},\ \frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{1+k}{k}$$

care ne dau, ținând cont de (1.1.1), $\beta=\frac{k}{1+k}$ și $\alpha=\frac{1}{1+k}$.

Observații.

1) Mijlocul $\bar{v}$ al segmentului $[\bar{a},\bar{b}]$ îl împarte în raportul k=1.
2) Extremitatea $\bar{v}=\bar{a}$ a segmentului $[\bar{a},\bar{b}]$ îl împarte în raportul k =0, fiind numită **extremitatea inițială** a segmentului.

Scanned with OKEN Scanner

3) Convenim să spunem că extremitatea $\bar{v}=\bar{b}$ a segmentului $[\bar{a},\bar{b}]$ îl împarte în raportul $k=+\infty$, fiind numită **extremitatea terminală** a segmentului.

1.2. Mulțimi convexe

Definiția 1.2.1. *Fie V un spațiu vectorial real şi X o parte a sa (nevidă). Se spune că mulțimea X este mulțime* ***convexă,*** *dacă oricare ar fi două elemente ale sale $\overline{v_1}$ şi $\overline{v_2}$ avem*

$$\lambda\overline{v_1}+(1-\lambda)\overline{v_2}\in X, 0\leq\lambda\leq 1 \qquad (1.2.1)$$

Din (9.1.2.1) rezultă că dacă X este o mulțime convexă şi $\overline{v_1},\overline{v_2}\in X$, atunci vectorii $\bar{x}=\overline{v_2}+\lambda(\overline{v_1}-\overline{v_2})$ aparțin lui X pentru orice $\lambda\in[0,1]$.

Scriind $\bar{x}=\overline{v_2}+\lambda(\overline{v_1}-\overline{v_2})$ şi făcând notația $\bar{v}=\overline{v_1}-\overline{v_2}$, care reprezintă diferența vectorilor dați $\overline{v_1}$ şi $\overline{v_2}$, introdusă prin relația $\overline{v_2}+\bar{v}=\overline{v_1}$, obținem

$$\bar{x}=\overline{v_2}+\lambda\bar{v},\ \lambda\in[0,1] \qquad (1.2.2)$$

Observăm că prima parte a lui (1.2.2) este o relație de forma

$$\bar{v}=\overline{v_0}+t^1\overline{v_1}+\ldots+t^m\overline{v_m}$$

corespunzător lui $m=1$.

Deducem că vectorii $\bar{x}$, care o satisfac, aparțin unei varietăți liniare 1-dimensionale (dreapta vectorială $L^1_{(v_2,U)}$ ce trece prin $\overline{v_2}$ şi are direcția subspațiului $U=\{\bar{u}=\lambda\bar{v}\mid\lambda\in R\}$. Dar cum variația lui λ este limitată la intervalul $[0,1]\in R$, vectorii $\bar{x}$ parcurg numai acea parte a varietății (segmentul $[\overline{v_1},\overline{v_2}]$) cuprinsă între vectorii $\overline{v_1}$ şi $\overline{v_2}$ ce-i aparțin, luând $\lambda=1$, respectiv $\lambda=0$. Pentru $\lambda\in(0,1)$, $\bar{x}\in[\overline{v_1},\overline{v_2}]\setminus\{\overline{v_1},\overline{v_2}\}$, parcurgând interiorul segmentului. Avem, deci, $[\overline{v_1},\overline{v_2}]\subset X$.

Scanned with OKEN Scanner

Reciproc, dacă $[\overline{v_1}, \overline{v_2}] \subset X$, atunci conform relației (1.1.1') de definiție a segmentului vectorial și (9.1.2.1), care este satisfăcută căci, prin ipoteză, are loc implicația $\overline{x} \in [\overline{v_1}, \overline{v_2}] \to \overline{x} \in X$, rezultă că X este mulțime convexă.

Am obținut, astfel, următorul rezultat:

Propoziția 1.2.1. *Mulțimea $X(\subset V)$ este o mulțime convexă, dacă și numai dacă odată cu două elemente arbitrare ale sale $\overline{v_1}$ și $\overline{v_2}$ aceasta conține întregul segment vectorial $[\overline{v_1}, \overline{v_2}]$ ce admite ca extremități elementele considerate.*

Propoziția 1.2.2. *Intersecția a două mulțimi convexe $X_1, X_2 (\subset V)$ este, de asemenea, o mulțime convexă.*

Demonstrație. Fie $\overline{v_1}, \overline{v_2} \in X_1 \cap X_2$. Atunci, cum $\overline{v_1}, \overline{v_2} \in X_i$ $(i = 1,2)$, care este mulțime convexă, conform Propoziției 1.2.1 rezultă că $[\overline{v_1}, \overline{v_2}] \subset X_i$ $(i = 1,2)$ și deci $[\overline{v_1}, \overline{v_2}] \subset X_1 \cap X_2$.

Observație. Reuniunea $X_1 \cup X_2$ a două mulțimi convexe nu este, în general, mulțime convexă.

Exemple:

1) $X_1 = \{\overline{v_1}\}$, formată cu un singur element, este mulțime convexă.

   $X_2 = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}\}$ nu este mulțime convexă.

2) $X_0 = R^n$ este mulțime convexă.

   $X_i = \{x \in R^n \mid x = (x^1, ..., x^n),\ x^i \geq 0,\ i = 1,2,...,n\}$ sunt mulțimi convexe;

aceste mulțimi sunt numite semispații ale lui R^n.

$X = \bigcap_{\alpha \in J} X_\alpha$ $,(J \subset 1,2,...,n)$ este mulțime convexă; această mulțime coincide cu un segment vectorial.

Scanned with OKEN Scanner

1.3. Acoperirea convexă a unei mulțimi de vectori

Definiția 1.3.1. *Fie* $X(\subset V)$ *o mulțime nevidă. Se numește* ***acoperire convexă*** *a mulțimii* X, *mulțimea* $[X]$ *a vectorilor spațiului* V *care aparțin intersecției tuturor mulțimilor convexe* $X_\alpha(\alpha \in A)$ *ce conține mulțimea* X.

Acoperirea convexă a mulțimii X se mai notează și $Co(X)$ și i se mai spune și **înfășurătoarea convexă.**

Observație. Înfășurătoarea convexă $[X]$ a mulțimii X este mulțime convexă, ca intersecție de mulțimi convexe.

Propoziția 1.3.1. (I). *Fie* X *convexă; atunci* $X = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - *familia tuturor mulțimilor convexe* X_α *care conțin pe* X. *Rezultă că* $[X] = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = X$.

(II). Presupunem $X = [X]$. *Atunci, conform Observației anterioare rezultă că* X *este convexă.*

Mai departe, vom particulariza noțiunea centrală a acestei secțiuni - cea de acoperire convexă a unei mulțimi - pentru cazul când mulțimea este un sistem de vectori.

Fie, deci, S un sistem finit de vectori ai spațiului liniar real V.

Definiția 1.3.2. *Se numește* ***combinație convexă*** *a sistemului de vectori* $S = \{\overline{v_i}\}_m$, *combinația liniară*

$$\overline{v} = \lambda_1 \overline{v_1} + \lambda_2 \overline{v_2} + ... + \lambda_m \overline{v_m} \qquad (1.3.1)$$

pentru care

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1,2,...,m \qquad (1.3.2)$$

Variabilele λ_i din combinația liniară (1.3.1), ce satisfac condițiile (9.1.3.2), se numesc **ponderi** ale elementelor $\overline{v_i}$, $i = 1,2,...,m$ în combinația convexă considerată; în plus, din

Scanned with OKEN Scanner

relațiile (1.3.2) rezultă că toate ponderile λ_i aparțin intervalului $[0,1](\subset R)$.

Exemple

Dacă se consideră un sistem de mase $\{m_1,...,m_n\}$, $m_i \geq 0$, plasate în punctele $\{A_1,...,A_n\}$ - extremitățile vectorilor legați ai sistemului $S=\{\overline{r_1},...,\overline{r_n}\}\subset V_0$, atunci vectorul legat $\overline{r}=\dfrac{m_1\overline{r_1}+...+m_n\overline{r_n}}{m_1+...+m_n}$, $\overline{r}=\overline{OG}$, care reprezintă **centrul de greutate** G al sistemului de mase considerat, este o combinație liniară convexă a vectorilor sistemului S cu ponderile

$$\lambda_i=\frac{m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},\quad i=1,2,...,n$$

Evident, se pot face mai multe combinații liniare convexe cu vectorii unui sistem dat, alegând diferite sisteme de ponderi $\{\lambda_1,...,\lambda_m\}$. Vom nota prin $Co(S)$ mulțimea tuturor combinațiilor convexe ale vectorilor sistemului S.

Propoziția 1.3.2. *Mulțimea tuturor combinațiilor liniare convexe ale vectorilor sistemului* $S=\{\overline{v_i}\}_m$ *este acoperirea convexă [S] a mulțimii S, adică avem egalitatea de mulțimi* $Co(S)=[S]$.

Demonstrație. (I) Vom nota mai întâi că orice combinație liniară convexă a vectorilor lui S aparțin lui $[S]$. Evident, $S\subset[S]$ și odată cu două elemente $\overline{v_1},\overline{v_2}\in[S]$ segmentul vectorial $[\overline{v_1},\overline{v_2}]\subset[S]$, căci S este mulțime convexă, dar $[\overline{v_1},\overline{v_2}]$ este mulțimea tuturor combinațiilor convexe (9.1.3.1) ale vectorilor sistemului $\{\overline{v_1},\overline{v_2}\}\subset[S]$, astfel că pentru n =2 afirmația este verificată.

Presupunem că

Scanned with OKEN Scanner

$$\bar{v}' = \lambda_1' \bar{v}_1 + ... + \lambda_{m-1}' \bar{v}_{m-1} \in [S]$$

cu $\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j = 1$, $\lambda_j \geq 0$, $j = 1,2,...,m-1$. Atunci, luând $\lambda' = 1 - \lambda_m \in [0,1]$, avem $\bar{v} = \lambda' \bar{v}' + \lambda_m \bar{v}_m \in [S]$ căci $\bar{v}', \bar{v}_m \in [S]$ şi $\bar{v} \in [\bar{v}', \bar{v}_m] \subset [S]$.

Rezultă că vectorul

$$\bar{v} = (\lambda' \lambda_1') \bar{v}_1 + ... + (\lambda' \lambda_{m-1}') \bar{v}_{m-1} + \lambda_m \bar{v}_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \bar{v}_i \in [S]$$

căci, notând $\lambda_j = \lambda' \lambda_j'$, $j = 1,2,...,m-1$ avem

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = \lambda'' (\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j') + \lambda_m = \lambda' + \lambda_m = 1$$

şi

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1,2,...,m.$$

(II) Reciproc, se poate arăta că oricare ar fi $\bar{v} \in [S]$ există un sistem de ponderi $\{\lambda_1,...,\lambda_m\}$, astfel încât $\bar{v}$ se scrie sub forma (1.3.1), unde $\bar{v}_i \in S$, $i = 1,2,..,m$.

1.4. Simplexe în R^n. Complexe şi poliedre

Definiţia 1.4.1. *Fie V spaţiul aritmetic real n-dimensional R^n. Un sistem de m+1 $(m \leq n)$ vectori (puncte) $\{x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}\} \subset R^n$ se numeşte* ***afin independent,*** *dacă sistemul de vectori $\{u_i = x_i - x_{m+1}\}$, $i = 1,2,...,m$ este liniar independent.*

Definiţia 1.4.2. *Se numeşte* ***m-simplex*** *(sau* ***simplex de dimensiune m)*** *al spaţiului R^n $(m \leq n)$, mulţimea Δ^m a tuturor punctelor spaţiului care sunt combinaţii convexe ale unui sistem de (m+1) puncte afin independente.*

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, dacă $S=\{x_1,x_2,...,x_m,x_{m+1}\}(\subset R^n)$ este un sistem de puncte afin independente, atunci m-simplexul generat de acest sistem va fi

$$\Delta^m=\{x\in R^n \mid x=\sum_{k=1}^{m+1}\lambda_k x_k,\ \sum_{k=1}^{m+1}\lambda_k=1,\ \lambda_k\geq 0\} \qquad (1.4.1)$$

punctele lui S se numesc **vârfurile simplexului** Δ^m, iar ponderile λ_k ale vârfurilor x_k în combinațiile convexe respective se numesc **coordonate baricentrice** ale punctului $x\in\Delta^m$ în raport cu sistemul de vârfuri S.

Observăm că $\Delta^m=Co(S)$ atunci când $S=\{x_k\}_{m+1}$ este un sistem de puncte afin independente în R^n şi avem $\Delta^m=[S]$; din acest motiv putem nota simplexul generat de sistemul de vârfuri $S=\{x_1,x_2,...,x_m,x_{m+1}\}(\subset R^n)$ prin $\Delta^m=[x_1x_2...x_{m+1}]$.

Relativ la dimensiunea simplexului, avem următoarele denumiri specifice acestuia:

- m=0: $\Delta^0=[x_1]$ **-punctul,** $x=x_1$;
- m=1: $\Delta^1=[x_1x_2]$ **-segmentul,** $x\in[x_1x_2]$;
- m=2: $\Delta^2=[x_1x_2x_3]$ **-triunghiul plan,** $x\in[x_1x_2x_3]$;
- m=3: $\Delta^3=[x_1x_2x_3x_4]$ **=-tetraedrul plan,** $x\in[x_1x_2x_3x_4]$;
- m=n: $\Delta^n=[x_1x_2...x_nx_{n+1}]$ **-simplexul maximal** al spațiului R^n, care pentru n=1 coincide cu segmentul $\Delta^1\subset R^1$,... .

Fie Δ^m un m-simplex din R^n şi $S=\{x_1,x_2,...,x_m,x_{m+1}\}(\subset R^n)$ vârfurile sale.

Punctul $x\in\Delta^m$ se numeşte **punct interior,** dacă în (1.4.1) acesta corespunde unui sistem de ponderi strict pozitive $\lambda_k>0,\ \forall k=1,2,...,m+1$.

Mulțimea tuturor punctelor interioare se notează $\overset{\circ}{\Delta}{}^m$ şi constituie ceea ce numim **interiorul simplexului.**

Scanned with OKEN Scanner

Complementara acestei mulțimi relativă la Δ^m se numeşte **frontiera simplexului** ; aceasta se notează $Fr(\Delta^m) = \Delta^m - \mathring{\Delta}^m$.

Fie $S_r (\subset S)$ o submulțime formată cu $r(\leq m)$ vârfuri ale simplexului Δ^m, adică $S_r = \{x_{i_1},...,x_{i_r}\}$, $(1 \leq i_1,...,i_r \leq m+1)$.

Evident, S_r este sistem de puncte afin independente. Simplexul generat de acesta, $\Delta^{r-1} = [S_r]$, este numit **față (r-1)-dimensională** a simplexului Δ^m. Notând prin $j_1,...,j_{m-r+1}$ indicii vârfurilor care de $i_1,...,i_r$ dacă în (9.1.4.1) punem

$$\lambda_{j_1} = ... = \lambda_{j_{m-r+1}} = 0 \qquad (1.4.2)$$

Obținem punctele $x \in \Delta^{r-1}$. Astfel, $\Delta^{r-1} \subset \Delta^m$ este o $(r\text{-}1)$-față a simplexului fiind caracterizată de ecuațiile (9.1.4.2).

Invers, fiecare sistem de tipul (9.1.4.2) pentru $1 \leq r \leq m$ defineşte câte o (r-1)-față a lui Δ^m; vârfurile $\Delta_k^0 = [x_k]$, $(k = 1,2,..,m+1)$ sunt fețele 0-dimensionale, iar $\Delta_k^{m-1} = [x_{i_1}...x_{i_m}]$ sunt fețele maximale (m-1)-dimensionale opuse vârfurilor $x_k \in S^m$; fețele 1-dimensionale Δ_j^i (în număr de C_{m+1}^2) sunt muchiile simplexului.

Observăm că $\left|\Delta_k^0\right| = \left|\Delta_k^{m-1}\right| = m+1$.

Ca urmare a celor de mai sus, este uşor de văzut că frontiera simplexului Δ^m poate fi descompusă într-o reuniune de fețe $(r\text{-}1)$-dimensionale, $r = 1,2,...,m$

$$Fr(\Delta^m) = (\bigcup_{j=1}^{C_{m+1}^1} \Delta_j^0) \cup (\bigcup_{j=1}^{C_{m+1}^2} \Delta_j^1) \cup ... \cup (\bigcup_{j=1}^{C_{m+1}^m} \Delta_j^{m-1}) \qquad (1.4.3)$$

Fiind date două simplexe Δ^{m_1} şi Δ^{m_2} ale lui R^n, se spune că acestea sunt **corect amplasate** dacă intersecția lor este vidă sau constă dintr-un simplex care este o față $\Delta^{r-1} (r \leq \min\{m_1, m_2\})$ pentru fiecare din ele.

Scanned with OKEN Scanner

Propoziția 1.4.1. *Două fețe ale aceluiaşi simplex sunt simplexe corect amplasate.*

Demonstrație. Fie $A=\Delta^{m_1}$ şi $B=\Delta^{m_2}$, $(m_1,m_2<m)$ două fețe ale simplexului Δ^m; acestea se obțin cu (9.1.4.1) pentru două seturi S_1 şi S_2 de condiții (9.1.4.2), conținând respectiv câte $(m-m_1)$ şi $(m-m_2)$ ecuații.

Dacă $S_1 \cup S_2 = S$ conține S ecuații şi $S(\leq 2m-m_1-m_2)<m+1$, atunci $A\cap B$ este un (m-s)-simplex al lui Δ^m, care este o (m-s)-față a fiecăruia dintre simplexele A şi B. În cazul s = m+1, sistemul (1.4.2) va fi incompatibil cu condiția $\sum_{k=1}^{m+1}\lambda_k=1$ şi $A\cap B=\phi$.

Definiția 1.4.3. *O familie finită K de simplexe ale lui R^n se numeşte* ***complex simplicial*** *(sau, simplu,* ***complex****) dacă:*

1) *Odată cu fiecare simplex Δ^m $(m\leq n)$ din familie aparțin familiei şi toate (r-1)-fețele sale $r=1,2,...,m)$*

şi

2) *Oricare ar fi două simplexe $\Delta^{m_1},\Delta^{m_2}\in K$ acestea sunt corect amplasate.*

Simplexele 0-dimensionale, aparținând lui K, se numesc **vârfurile complexului.**

Dimensiunea maximală a simplexelor lui K se numeşte **dimensiunea complexului.**

Definiția 1.4.4. *Mulțimea X a tuturor punctelor ce aparțin simplexelor unui complex K este o parte a lui R^n numită* ***politop.***

Un politop ce poate fi descompus în reuniunea unui număr de simplexe Δ_α^m ($\alpha\in A$-familie finită de indici), având aceiaşi dimensiune *m*, se numeşte **m-poliedru**.

Scanned with OKEN Scanner

Un m-poliedru X poate fi sau nu o mulțime convexă în spațiul liniar R^n; în caz afirmativ el se va numi **poliedru convex**.

Oricum, m-poliedrele, ca reuniune de m-simplexe, vor fi reuniuni de mulțimi punctuale euclidiene şi le putem asocia o măsură **m-volumul**.

2. Obiectul programării liniare

Modelele matematice moderne sunt folosite în organizarea producției, astfel că toate activitățile economice trebuie realizate în condiții optime având profit maxim, cheltuieli minime şi timp de producție redus.

Dacă mărimile şi funcțiile pe care le folosim la enunțarea problemei sunt liniare, atunci modelul matematic se numeşte **programare liniară**.

Pentru a înțelege importanța şi modul de utilizare al programării liniare în practica economică, vom prezenta două exemple de probleme economice ce pot fi soluționate cu metodele de programare liniară :

Exemplul 1. O întreprindere urmează să producă n tipuri de produse P_j, $j=\overline{1,n}$ prin utilizarea a m tipuri de resurse R_i, $i=\overline{1,m}$ (materii prime, forță de muncă, energie) limitate de cantitățile b_i, $i=\overline{1,m}$. Se presupun cunoscute **consumurile tehnologice** a_{ij} – adică cantitatea din resursa R_i necesară producerii unei unități din produsul P_j – şi **beneficiile unitare** c_j, $j=\overline{1,n}$ pentru fiecare produs P_j.

Se cere să se determine cantitățile ce urmează a fi realizate din fiecare produs astfel încât beneficiul să fie maxim.

Scanned with OKEN Scanner

Vom nota cu x_j cantitatea ce se va produce din produsul P_j ce va fi fabricat. Modelul matematic al acestei probleme este următorul:

Încasările totale sunt date de :

(1) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max,$

iar cantitatea totală ce s-a consumat din resursa R_i este :

(2) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$, adică

(2') $$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m},$$

iar $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$

Exemplul 2. Vitaminele V_i, $i = \overline{1,m}$ necesare păstrării sănătății organismului uman trabuie consumate zilnic în cantitățile b_i, $i = \overline{1,m}$. Pentru aceasta, trebuie consumate alimentele A_j, $j = \overline{1,n}$ care conțin aceste vitamine. Presupunem că se cunosc cantitățile a_{ij} din vitaminele V_i precum şi costurile alimentelor A_j.

Se cere să se determine o rație optimă, deci costul să fie minim.

Vom nota cu x_j cantitatea ce se va consuma din alimentul A_j. Modelul matematic va fi

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

3. Rezolvarea problemei de programare liniară

O problemă de programare liniară este compusă din trei elemente :

- funcția de optimizat
- sistemul liniar de restricții specifice
- condiții de nenegativitate

adică

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n} \quad (3)$$

Această formă o vom numi standard sau canonică. Pentru modelele de programare liniară care nu au formă standard, se va construi o formă standard echivalentă.

Scanned with OKEN Scanner

Cele trei elemente pot fi scrise şi matriceal astfel : notăm

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, P_0=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

şi obţinem : (1') $f = cx$,

(2') $AX = P_0$,

(3') $x \geq 0$.

A rezolva o problemă de programare liniară înseamnă a găsi mulţimea programelor optime şi a optimului funcţiei f.

Definiţia 3.1. *Un vector x care verifică sistemul (2) şi condiţiile (3) se numeşte* ***soluţie posibilă (realizabilă)*** *a problemei de programare liniară.*

Definiţia 3.2. *Numim* ***soluţie de bază****, o soluţie care are cel mult m componente strict pozitive, restul fiind zero.*

Definiţia 3.3. *O soluţie de bază este* ***nedegenerată*** *dacă numărul componentelor strict pozitive este egal cu m şi* ***degenerată*** *dacă numărul componentelor strict pozitive este mai mic decât m.*

Definiţia 3.4. *O soluţie posibilă care realizează optimul funcţiei se numeşte* ***soluţie optimă****.*

Se cunoaşte că o soluţie optimă dacă există trebuie să fie soluţie de bază.

Una dintre cele mai simple metode de programare liniară este **algoritmul simplex**. Acest algoritm are la bază metoda Gauss-Jordan de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare.

Etapele algoritmului simplex sunt :

1. Aducerea sistemului (2) la forma canonică, adică la forma cu egalităţi.
2. Găsirea unei soluţii de bază.
3. Căutarea soluţiei optime şi a valorii optime a funcţiei.

Astfel, notăm

Scanned with OKEN Scanner

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \; \ldots, \; P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Corespunzător acestei baze se realizează următorul tabel simplex:

Baza	P_0	P_1	P_2	...	P_α	...	P_m	...	P_k	...	P_β	...	P_n
P_1	b_1	1	0		0		0		a_{1k}		$a_{1\beta}$		a_{1n}
P_2	b_2	0	1		0		0		a_{2k}		$a_{2\beta}$		a_{2n}
⋮	⋮												
P_α	b_α	0	0		1		0		$a_{\alpha k}$		$a_{\alpha\beta}$		$a_{\alpha n}$
⋮	⋮												
P_m	b_m	0	0		0		1		a_{mk}		$a_{m\beta}$		a_{mn}

Pentru a se obține o soluție de bază vom schimba o singură variabilă, adică din baza veche scoatem un vector P_α și în locul lui punem alt vector P_β obținut prin transformări elementare :

- vom împărți linia α cu elementul $a_{\alpha\beta}$ numit pivot, rezultând $\theta_k = \dfrac{a_{\alpha k}}{a_{\alpha\beta}}, \; k = \overline{1,n}$
- vom face zerouri pe coloana pivotului astfel ca elementele ce rezultă vor fi :

$$\begin{cases} a'_{jk} = a_{jk} - \theta_k a_{j\beta} \\ a'_{\beta k} = \theta_k \end{cases}, \; j = \overline{1,m} \setminus \{\alpha\}.$$

Pentru ca noua soluție să fie soluție de bază trebuie ca

$$b_j - \theta a_{j\beta} > 0, \quad j = \overline{1,m} \setminus \{\alpha\}, \text{ adică : } 0 < \theta < \frac{b_j}{a_{j\beta}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Concluzionând, un vector P_β din afara bazei poate fi introdus în baza nouă dacă are componente pozitive. Pentru fixarea vectorului P_α care se scoate din bază se determină numărul pozitiv

$$\theta = m_{ij}\left(\frac{b_j}{a_{j\beta}}\right) = \frac{b_\alpha}{a_{\alpha\beta}}.$$

Pentru a trece de la o soluție de bază la alta se procedează astfel :

- se fixează vectorul P_β care se pune în bază;
- se calculează rapoartele pozitive $\frac{b_j}{a_{\alpha\beta}}$ pentru a putea determina numărul θ cu care aflăm vectorul P_α ;elementele din noul tabel simplex de pe linia lui P_β se determină cu relațiile $\theta = \frac{b_\alpha}{a_{\alpha\beta}}$, $\theta_k = \frac{a_{\alpha k}}{a_{\alpha\beta}}$ iar elementele de pe celelalte linii se determină cu $b'_j = b_j - \theta a_{j\beta}$,

$$a'_{jk} = a_{jk} - \theta_k a_{j\beta},\ \mathbf{j = \overline{1,m} \setminus \{\alpha\}}.$$

Ne interesează să aflăm valoarea optimă a funcției

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j .$$

Această valoare poate fi maximă sau minimă.

Notăm cu z_0 valoarea funcției f corespunzătoare primei soluții de bază:

$$z_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{m} b_j c_j .$$

Notăm cu z'_0 valoarea funcției f corespunzătoare soluției de bază din tabelul II

Rezultă $z'_0 = z_0 + \theta(c_\beta - z_\beta) = z_0 + \theta\Delta_\beta$ unde am notat cu $z_\beta = \sum a_{j\beta} c_j$.

Scanned with OKEN Scanner

Observația 3.1. Dacă $\Delta_\beta = c_\beta - z_\beta > 0$ și din $\theta > 0$ rezultă $z'_0 > z_0$, adică trecând la o altă bază valoarea funcției f devine mai mare.

Observația 3.2. Dacă $\Delta_\beta = c_\beta - z_\beta < 0$, rezultă $z'_0 < z_0$, adică valoarea funcției f devine minimă. Se va întocmi un tabel:

c_i	Baza	P_0	c_1	c_2	c_m	c_k	c_β	c_n
			P_1	P_2	P_m	P_k	P_β	P_n
c_1	P_1	B_1	1	0	0	a_{1k}	$a_{1\beta}$	a_{1n}
c_2	P_2	B_2	0	1	0	a_{2k}	$a_{2\beta}$	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			
c_α	P_α	B_α	0	0	0	$a_{\alpha k}$	$a_{\alpha\beta}$	$a_{\alpha n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			
c_m	P_m	B_m	0	0	1	a_{mk}	$a_{m\beta}$	a_{mn}
	z_k	z_0	z_1	z_2	z_m	z_k	z_β	z_n
$\Delta_k = c_k - z_k$			$c_1 - z_1$	$c_2 - z_2$	$c_m - z_m$	$c_k - z_k$	$c_\beta - z_\beta$	$c_n - z_n$

Exemplul 3. Să se rezolve cu ajutorul algoritmului simplex următoarea problemă de programare liniară :

$$f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Se va întocmi următorul tabel simplex

c_B	Baza	1	2	3	5	c
		P_1	P_2	P_3	P_4	b
	e_1	[2]	1	-1	2	6
	e_2	1	1	2	0	5
	e_3	-1	2	1	1	8
1	P_1	1	1/2	-1/2	1	3
	e_2	0	[1/2]	5/2	-1	2
	e_3	0	5/2	1/2	2	11
1	P_1	1	0	-3	2	1
2	P_2	0	1	5	-2	4
	e_3	0	0	-12	[7]	1
1	P_1	1	0	[3/7]	0	5/7
2	P_2	0	1	11/7	0	30/7
5	P_4	0	0	-12/7	1	1/7

	z_j	1	2	−5	5	10
	$c_j - z_j$	0	0	8	0	-
3	P_3	7/3	0	1	0	5/3
2	P_2	-11/3	1	0	0	5/3
5	P_4	4	0	0	1	3
	z_j	59/3	2	3	5	70/3
	$c_j - z_j$	-56/3	0	0	0	-

Scanned with OKEN Scanner

Diferențele $c_j - z_j$ sunt nepozitive, deci am obținut soluția optimă $x = \left(0, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 3\right)$, iar $f_{max} = \frac{70}{3}$.

Exemplul 4. Problema deşeurilor minime

Avem la dispoziție bare de fier de 14 cm lungime din care trebuie tăiate 500 bucăți de 8 m, 800 bucăți de 5,25 m şi 450 bucăți de 2,5 m. Se cere să se stabilească modul de tăiere care asigură cantitatea minimă de deşeuri.

Rezolvare. Pentru fiecare bară sunt 5 soluții

- se taie o bucată de 8 m şi alta de 5,25 m rezultând un deşeu de 0,75 m
- se taie o bucată de 8 m şi două de 2,5 m, deşeul rezultat este de 1 m
- se taie 2 bucăți de 5,25 m şi una de 2,5 m, rezultă deşeu de 1,25 m
- o bucată de 5,25 m şi trei de 2,5 m, deşeu 1,25
- cinci bucăți de 2,5 m, deşeu 1,5 m

Notăm cu x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 numărul de bare planificate a se tăia în modurile respective. Ele satisfac condițiile :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 500 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 800 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 450 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$$

$$f = \frac{3}{4}x_1 + x_2 + x_3 + \frac{5}{4}x_4 + \frac{6}{4}x_5 =$$

$$= \frac{1}{4}(3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5)$$

Astfel vom căuta minimul funcției

$$f = 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5$$

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul neavând explicită o soluție de bază modificăm sistemul adăugând noi variabile numite variabile artificiale :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_6 = 500 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + x_7 = 800 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 + x_8 = 450 \end{cases}$$

cu $x_7, x_8, x_9 \geq 0$.

Funcția f va fi

$$\bar{f} = 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 + \lambda x_6 + \lambda x_7 + \lambda x_8$$

unde λ este un număr pozitiv foarte mare.

Funcția $\bar{f}$ va lua valoarea minimă atunci când variabilele artificiale vor ajunge să ia valoarea zero.

c_B	Baza	3	4	4	5	6	λ	λ	λ	c
		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	b
λ	P_6	1	1	0	0	0	1	0	0	500
λ	P_7	1	0	2	1	0	0	1	0	800
λ	P_8	0	2	1	3	5	0	0	1	450
	$z_j - c_j$	$2\lambda - 3$	$3\lambda - 4$	$3\lambda - 4$	$4\lambda - 5$	$5\lambda - 6$	0	0	0	
λ	P_6	1	1	0	0	0	1	0		500
λ	P_7	1	0	2	1	0	0	1		800
6	P_5	0	2/5	1/5	3/5	1	0	0		90
	$z_j - c_j$	$2\lambda - 3$	$\lambda - 8/5$	$2\lambda - 4/5$	$\lambda - 7/5$	0	0	0		
λ	P_6	1	1	0	0	0	1			500
4	P_3	1/2	0	1	1/2	0	0			400
6	P_5	-1/10	2/5	0	1/2	0	0			10
	$z_j - c_j$	$\lambda - 8/5$	$\lambda - 8/5$	0	0	0	0			
3	P_1	1	1	0	1	0				500
4	P_3	0	-1/2	1	1/2	0	0	0		150
6	P_5	0	1/2	0	1/2	1	0			60
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	0				

Scanned with OKEN Scanner

Soluția optimă este

$$x_1 = 500,\ \ x_3 = 150,\ \ x_5 = 60,\ \ x_2 = x_4 = 0$$

iar cantitatea minimă de deşeuri va fi

$$f = 3 \cdot 500 + 4 \cdot 150 + 6 \cdot 60 = 2460 \text{ m.}$$

Deoarece toate diferenţele $z_j - c_j$ sunt nule rezultă că am obținut soluția optimă.

4. Metoda simplex şi algoritmul simplex primal

4.1. Principiile metodei simplex

Din teoremele paragrafului precedent, putem trage concluzia că pentru rezolvarea unei probleme de programare liniară este suficient a cerceta toate soluțiile de bază admisibile (care formează o mulțime finită) pentru a găsi pe acelea care realizează minimul funcției *f*.

Metoda simplex, elaborată de G.B.Danzing, are avantajul că pe lângă un volum mic de calcule, ne dă răspunsuri la situațiile ce se pot ivi în legătură cu rezolvarea problemei de programare liniară. Se porneşte de la o soluție de bază admisibilă care este supusă unui criteriu de optimalitate pentru a vedea dacă este soluția căutată sau nu.

Dacă nu este cea căutată, se indică procedeul prin care putem obține o soluție de bază admisibilă pentru care funcția obiectiv ia o valoare mai mică într-o problemă de minim. După un număr finit de paşi, ajungem la soluția optimă, dacă aceasta există. Se indică, de asemenea, şi situațiile în care nu există soluții optime pentru problema propusă.

Să considerăm problema de programare liniară sub forma standard.

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{aligned} &AX = B \\ &X \geq 0 \\ &f(X) = CX \ \ MINIM \end{aligned} \qquad (4.1.1)$$

sau

$$\begin{aligned} &x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_nP_n = P_0 \\ &X \geq 0 \\ &f(X) = CX \ \ MINIM \end{aligned} \qquad (4.1.2)$$

Presupunem că în matricea A primele m coloane reprezintă coloanele matricei unitate de ordinul m. Dacă nu este aşa, putem realiza acest lucru prin transformări elementare. Matricea A în presupunerea făcută se prezintă sub forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{1,m+1} & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_{2,m+1} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{m,m+1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \qquad (4.1.3)$$

iar componentele vectorului B le vom nota cu β_i, el prezentându-se sub forma

$$B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \qquad (4.1.4)$$

Vectorii $P_1, P_2, \ldots, P_m$ formați cu primele m coloane ale matricei A vor forma o bază în spațiul $R^m \subset R^n$. În aceste condiții, un vector oarecare P_j $(j = m+1, m+2, \ldots, n)$ se exprimă în mod unic cu ajutorul vectorilor P_i $(i = 1,2,\ldots,m)$ sub forma:

$$P_j = \alpha_{1j}P_1 + \alpha_{2j}P_2 + \ldots + \alpha_{mj}P_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}P_i \qquad (4.1.5)$$

Notăm cu C_B vectorul linie format cu primele m componente ale vectorului C şi cu

Scanned with OKEN Scanner

$$z_j = C_B P_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij} \qquad (4.1.6)$$

Dacă ținem seama de (9.4.1.3), deducem că vectorul X de componente

$$\overline{x_1} = \beta_1,\ \overline{x_2} = \beta_2,\ \ldots, \overline{x_m} = \beta_m,\ \overline{x_{m+1}} = 0, \ldots, \overline{x_n} = 0$$

este o soluție de bază admisibilă a problemei propuse.

Aici, am considerat că $\beta_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,m$.

Teorema 4.1.1. (Criteriul de optimalitate) *Dacă diferențele* $z_j - c_j \leq 0,\ j = 1,2,\ldots,n$, *atunci problema de programare liniară are un optim finit, iar vectorul X este soluția căutată.*

Demonstrație. Fie vectorul X de componente $x_j,\ j = 1,2,\ldots,n$ o soluție admisibilă oarecare a problemei de programare liniară şi $\overline{X}$ soluția de bază admisibilă de mai înainte.

Putem scrie în acest caz, dacă avem în vedere (9.4.1.2):

$$P_0 = \sum_{j=1}^{n} x_j P_j \qquad (4.1.7)$$

$$P_0 = \sum_{i=1}^{m} \beta_i P_i \qquad (4.1.8)$$

Dacă ținem seama de (4.1.5) din (4.1.7), avem:

$$P_0 = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} P_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{ij}\right) P_i \qquad (4.1.9)$$

Având în vedere că exprimarea unui vector într-o bază este unică, din (9.4.1.8) şi (9.4.1.9) obținem

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{ij},\ i = 1,2,\ldots,m \qquad (4.1.10)$$

Dacă ținem acum seama de (4.1.6) şi (4.1.10), găsim:

Scanned with OKEN Scanner

$$f(\overline{X})-f(X)=\sum_{i=1}^{m}c_i\beta_i-\sum_{j=1}^{n}c_jx_j=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_i(\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_{ij})-\sum_{j=1}^{n}c_jx_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}x_j(\sum_{i=1}^{m}c_i\alpha_{ij})-\sum_{j=1}^{n}c_jx_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}x_jz_j-\sum_{j=1}^{n}c_jx_j=\sum_{j=1}^{n}x_j(z_j-c_j),$$

$$f(\overline{X})-f(X)=\sum_{j=1}^{n}x_j(z_j-c_j) \qquad (4.1.11)$$

În baza ipotezei făcute şi deoarece $x_j\geq 0$, din (3.2.11) rezultă că $f(\overline{X})\leq f(X)$, adică $\overline{X}$ este soluția pentru care f ia valoarea cea mai mică.

Observație. În problemele de programare liniară cu cerința de maxim pentru funcția obiectiv, criteriul de optimalitate va fi de forma

$$z_j-c_j\geq 0,\quad j=1,2,...,n.$$

Tot din (4.1.11) rezultă că dacă pentru un j, $j=1,2,...,n$ avem, $z_j-c_j>0$, atunci vor exista soluții pentru care funcția obiectiv să ia o valoare mai mică decât pentru soluția $\overline{X}$.

Să vedem acum modalitatea de a obține o soluție Y (în ipoteza că X nu este soluție optimă) astfel încât să avem $f(Y)=f(X)$.

O nouă soluție se poate obține, dacă se înlocuieşte un vector din baza P_i cu un alt vector P_j.

Să notăm cu y_k $(k=1,2,...,i-1,j,i+1,...,m)$ componentele vectorului Y în noua bază. Condițiile pe care trebuie să le îndeplinească un vector P_i din bază pentru a putea fi înlocuit cu un vector P_j sunt cuprinse în teorema:

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 4.1.2. (Criteriul de ieşire) *Condiţiile necesare şi suficiente ca un vector din bază* P_i *să fie înlocuit de un vector* P_j *sunt*

$$\alpha_{ij} > 0, \ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \le \frac{\beta_k}{\alpha_{kj}} \qquad (4.1.12)$$

Demonstraţie. Exprimând că X şi Y sunt soluţii pentru problemă, putem scrie

$$P_0 = \sum_{k=1}^{i-1} \beta_k P_k + \beta_i P_i + \sum_{k=i+1}^{m} \beta_k P_k \qquad (4.1.13)$$

$$P_0 = \sum_{k=1}^{i-1} y_k P_k + y_j P_j + \sum_{k=i+1}^{m} y_k P_k \qquad (4.1.14)$$

Din relaţia (4.1.14), Ţinând seama de (4.1.5), obţinem

$$P_0 = \sum_{k=1}^{i-1} (y_k + y_j \alpha_{kj}) P_k + y_j \alpha_{ij} P_i + \sum_{k=i+1}^{m} (y_k + y_j \alpha_{kj}) P_k \qquad (4.1.15)$$

Comparând (4.1.13) cu (4.1.15), găsim:

$$\begin{cases} \beta_k = y_k + y_j \alpha_{kj} \\ \beta_i = y_j \alpha_{ij} \end{cases} \qquad (4.1.16)$$

sau

$$\begin{cases} y_k = \beta_k - \dfrac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \alpha_{kj} \\ y_j = \dfrac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \end{cases} \qquad (4.1.17)$$

Dar noi dorim ca Y să fie soluţie de bază admisibilă, adică să aibă cel mult m componente strict pozitive. În aceste condiţii, din (4.1.17) va rezulta

$$\beta_k - \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \alpha_{kj} \ge 0, \ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \ge 0 \qquad (4.1.18)$$

sau

$$\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \le \frac{\beta_k}{\alpha_{kj}}, \ \alpha_{ij} > 0$$

Scanned with OKEN Scanner

şi cu aceasta teorema este demonstrată.

Teorema 4.1.3. (Criteriul de intrare) *Condiţia pe care trebuie s-o îndeplinească un vector* P_j $(j = m+1, m+2, ..., n)$, *pentru a intra în bază în locul vectorului* P_i *în vederea obţinerii unei soluţii mai bune, este:*

$$z_j - c_j \geq 0 \qquad (4.1.19)$$

Demonstraţie. Să calculăm diferenţa $f(Y) - f(\overline{X})$. Vom avea:

$$f(Y) - f(\overline{X}) = \sum_{k=1}^{i-1} c_k y_k + c_j y_j + \sum_{k=i+1}^{m} c_k y_k - \sum_{k=1}^{i-1} c_k \beta_k - c_i \beta_i - \sum_{k=i+1}^{m} c_k \beta_k$$

Dacă avem în vedere (9.4.1.17), găsim

$$f(Y) - f(\overline{X}) = \sum_{k=1}^{i-1} c_k \left(-\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \alpha_{kj}\right) - c_i \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} c_{ij} + c_j \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} + \sum_{k=i+1}^{m} c_k \left(-\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \alpha_{kj}\right)$$

sau

$$f(Y) - f(\overline{X}) = -\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \sum_{k=1}^{i-1} c_k \alpha_{kj} + c_j \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \qquad (4.1.20)$$

Ţinând cont de (9.4.1.6), constatăm că

$$f(Y) - f(\overline{X}) = -\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} (z_j - c_j) \qquad (4.1.21)$$

Aşa cum $\alpha_{ij} > 0$, $\beta_i > 0$, pentru a avea $f(Y) - f(\overline{X})$ va trebui ca $z_j - c_j \geq 0$ şi ,astfel, teorema este demonstrată.

Faptul că am considerat aici $z_j - c_j \geq 0$, ne va da posibilitatea să găsim mai multe soluţii optime pentru problema de programare liniară când aceasta există.

Observaţie. Din relaţia (4.1.21) observăm că dacă $\alpha_{ij} \leq 0$, cum $\beta_i \geq 0$, $z_j - c_j \geq 0$, atunci nu este posibil a obţine o soluţie Y pentru care funcţia obiectiv să ia o valoare mai mică.

Spunem că, în acest caz, problema de programare are un optim infinit, sau că nu are soluţie.

Scanned with OKEN Scanner

4.2. Algoritmul simplex primal

Considerațiile din aliniatul precedent ne permit să punem în evidență etapele prin care trebuie să trecem pentru a obține soluția optimă a problemei (când aceasta există), pornind de la o soluție de bază admisibilă oarecare.

Recapitulând , **etapele algorimului simplex primal** sunt:

I. Se determină o soluție de bază admisibilă.

II. Se calculează diferențele $z_j - c_j$.

a) Dacă toate diferențele $z_j - c_j \le 0$ atunci, conform criteriului de optimalitate, soluția este optimă şi algoritmul se opreşte.

b) Dacă există indici j pentru care $z_j - c_j > 0$, iar toate componentele vectorului P_j sunt mai mici sau egale cu zero $(\alpha_{ij} < 0)$, atunci problema nu are soluție şi algoritmul se opreşte.

c) Dacă există indici j pentru care $z_j - c_j > 0$ şi nu toți $\alpha_{ij} < 0$, atunci trecem la următoarea etapă.

III. Se aplică Criteriul de intrare, determinând vectorul P_j care trebuie să intre în bază. Se alege acel vector P_j, pentru care $z_j - c_j$ are valoarea strict pozitivă cea mai mare.

IV. Se aplică Criteriul de ieşire, determinând vectorul P_i care părăseşte baza. Se alege acel vector P_i pentru care

$$\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} = \min \frac{\beta_k}{\alpha_{kj}} \quad , \; k = 1,2,...,m \qquad (4.2.1)$$

$$k / \alpha_{kj} > 0$$

V. Se face schimbarea de bază, obținându-se o nouă soluție de bază admisibilă şi etapele algoritmului se reiau. După un număr finit de paşi, se găseşte soluția optimă a problemei, dacă aceasta există.

Scanned with OKEN Scanner

5. Aplicații propuse

1. Aflați valoare maximă a funcției

$$f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$$

dacă

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 450 \end{cases},$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}.$$

3. Aflați valoarea minimă a funcției

$$f = 3x_1 - 7x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 5x_4 + 3x_5$$

în condițiile

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_7 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 9 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,7}.$$

4. Se cere maximul funcției

$$f = 50x_1 + 300x_2 + 30x_3 + 60x_4 + 40x_5$$

în condițiile

$$\begin{cases} \frac{6}{5}x_2 + x_3 + x_4 = 1000 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 500 \\ x_1 + \frac{13}{10}x_2 = 80 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}.$$

Scanned with OKEN Scanner

5. Să se rezolve problema de programare liniară

$$f = 2x_1 - x_2 + x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}.$$

5. În alcătuirea unui meniu, se cere să conţină 880 unităţi glucide, 520 protide şi 440 vitamine conţinute în alimentele A_1, A_2, A_3, A_4 după tabelul :

Elemente nutritive	Alimente				Raţia biologică
	A_1	A_2	A_3	A_4	
Glucide	3	1	1	2	880
Protide	1	1	2	1	520
Vitamine	1	3	1	1	440
Preţ	10	14	12	8	

Să se determine cantităţile x_1, x_2, x_3, x_4 din cele 4 alimente ce trebuie folosite astfel încât costul meniului să fie minim.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ ECONOMICĂ

3.1. Funcții de mai multe variabile și aplicații economice

Vom considera o funcție $f: D \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^p$ cu D o mulțime finită din $\mathbf{R}^k$, definită de funcțiile reale $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x))$.

Definiția 1.1. *O funcție* $f: D \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^p$ are limita $y_0 \in \mathbf{R}^p$ într-un punct de acumulare $x_0 \in D$ dacă este îndeplinită una din condițiile echivalente :

(1) oricare ar fi vecinătatea V pentru $y_0 \in \mathbf{R}^p$, există o vecinătate U pentru $x_0 \in D$ astfel încât $f(x) \in V$, pentru orice $x \in U \cap (D \setminus \{x_0\})$, adică $f(U \cap (D \setminus \{x_0\})) \subseteq V$.

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{x_0\}$ cu $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - y_0\| < \varepsilon$.

(3) oricare ar fi șirul $(x_n)_{n \in N}$ de elemente din $D \setminus \{x_0\}$ cu $x_n \to x_0$, rezultă $f(x_n) \to y_0$.

Pentru cazul particular $f: D \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, punctul de acumulare $x_0 = (x_0, y_0)$ pentru mulțimea D, limita se notează

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = \ell$$

dacă și numai dacă

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta$ și $|y - y_0| < \delta$ rezultă $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Scanned with OKEN Scanner

Putem considera şi limitele iterate $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ şi $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, care dacă există, nu sunt totdeauna egale. Dacă însă există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ şi $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, atunci există

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Astfel, dacă limitele iterate există şi sunt diferite, atunci nu există limita globală $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$. Chiar dacă limitele iterate sunt egale, este posibil să nu existe $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

Exemplul 1. $f:\mathbf{R}^2\setminus\{(x,y):x+y\neq 0\}\to\mathbf{R}$, $f(x,y)=\dfrac{2x-y}{x+y}$

Limitele iterate sunt

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=-\lim_{y\to 0}\frac{y}{y}=-1$$

diferite, deci limita globală $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nu există, ceea ce se poate constata şi direct :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x,y)=\frac{2-m}{1+m},\ m\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}.$$

Rezultatele de mai sus pot fi enunţate similar pentru funcţii de k variabile.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 1.2. *Fie* $f:D\subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^p$ *și* $x_0 \in D$. *Funcția f se numește* ***diferențiabilă în*** x_0 *dacă* $\exists$ *un operator liniar* $T:\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^p$ *astfel încât* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)-T(x-x_0)}{\|x-x_0\|}=0.$

Operatorul T *se numește* ***diferențiala (derivata Fréchet)*** *funcției f în* x_0 *și se notează cu* $df(x_0)$.

Dacă f este diferențiabilă în orice punct din D, atunci se spune că f este **diferențiabilă pe D**.

Definiția 1.3. *Prin* ***derivata parțială de ordinul I*** *în raport cu variabila* x_i *a unei funcții* $f:D\subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ *într-un punct* $x_0=(x_{0_1},x_{0_2},\ldots,x_{0_k})$ *din D, se înțelege*

$$\lim_{x_i\to x_{0_i}} \frac{f(x_{0_1},x_{0_2},\ldots,x_{0_{i-1}},x_{0_{i+1}},\ldots,x_{o_k})-f(x_0)}{x_i-x_{0_i}}$$

notată cu $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ *sau* $f'_{x_i}(x_0)$.

În practică, derivatele parțiale $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ se calculează ținând seama de proprietățile funcției reale de o variabilă reală derivabile și considerând variabilele x_k $(k\neq i)$ constante.

Pentru cazul particular $f:D\subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, când f este o funcție reală de două variabile reale și (x_0,y_0) un punct interior mulțimii D, derivatele parțiale în punctul (x_0,y_0) sunt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

În acest caz, diferențiala funcției f are expresia

Scanned with OKEN Scanner

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy .$$

Exemplul 2. Fie $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x + y > 0\}$ şi $f : D \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = x^2 \ln(x+y)$.

Derivatele parţiale sunt :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\ln(x+y) + \frac{x^2}{x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2}{x+y},\ \forall (x,y) \in D .$$

Dacă derivatele parţiale de primul ordin pot fi la rândul lor derivate parţial, se obţin derivate parţiale mixte, de ordinul doi şi se notează astfel :

$$f''_{x^2} = (f'_x)'_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f''_{yx} = (f'_y)'_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f''_{y^2} = (f'_y)'_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Exemplul 3. $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = 2x^2 + 3xy - y^3$.

Derivatele parţiale de ordinul I şi de ordinul II vor fi :

Scanned with OKEN Scanner

$$f'_x(x,y)=4x+3y$$

$$f'_y(x,y)=3x-3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=3,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=3,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6y$$

Din ***Exemplul 3***, se observă că derivatele parțiale mixte de ordinul II $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ sunt egale. Această egalitate nu are loc în general.

Vom prezenta două criterii de coincidență între derivatele parțiale mixte.

Teorema 1.1. Criteriul lui Schwartz. Dacă funcția $f:D\subseteq \mathbf{R}^2\to \mathbf{R}$ are derivate parțiale mixte de ordinul al doilea $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ într-o vecinătate a punctului $(x_0,y_0)\in D$ și dacă ele sunt continue în (x_0,y_0), atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$.

Teorema 1.2. Criteriul lui Young. Dacă toate derivatele parțiale de ordinul I ale unei funcții f există cel puțin pe o vecinătate a unui punct x_0 interior unei mulțimi și sunt diferențiabile în x_0, atunci derivatele parțiale mixte de ordinul II există și sunt egale.

Toate aceste rezultate prezentate pentru funcții reale de două variabile se extind și pentru funcții de n variabile.

Scanned with OKEN Scanner

În continuare vom prezenta câteva **aplicații economice ale derivatelor parțiale.**

Definiția 1.4. *Numim* ***valoare marginală*** *sau* ***viteză de variație*** *a lui f în raport cu variabila x_i, derivata parțială a acesteia în raport cu x_i, adică*

$$VM(f,x_i)=\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i}.$$

Definiția 1.5. *Numim* ***ritm de variație*** *a funcției f în raport cu variabila x_i, expresia*

$$R(f,x_i)=\frac{1}{f}\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i}=\frac{VM(f,x_i)}{f}.$$

Definiția 1.6. *Numim* ***elasticitate*** *a lui f în raport cu variabila x_i, expresia*

$$E(f,x_i)=\frac{x_i}{f}\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i}=\frac{x_i}{f}VM(f,x_i)$$

Exemplul 4. Să se determine valoarea marginală în raport cu variabila x, ritmul de variație şi elasticitatea pentru funcția $f(x,y,z)=xyz$.

Soluție.
$$VM(f,x)=\frac{\partial f}{\partial x}=yz,$$

$$R(f,x)=\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{yz}{xyz}=\frac{1}{x},$$

$$E(f,x)=\frac{x}{f}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{xyz}yz=1.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.2. Puncte de extrem ale funcţiilor de mai multe variabile şi aplicaţii economice

Fie $f: D \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ şi $x_0 \in D$.

Definiţia 2.1.

(1) *x_0 se numeşte **punct de minim** (local) pentru funcţia f dacă există măcar o vecinătate V a lui x_0 astfel încât $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in V \cap D$; dacă $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in D$, atunci x_0 se numeşte **punct de minim absolut** pentru f pe D.*

(2) *x_0 se numeşte **punct de maxim** (local) pentru funcţia f dacă există cel puţin o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in U \cap D$; dacă $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in D$, atunci x_0 se numeşte **punct de maxim absolut** pentru f pe D.*

Orice punct de minim sau de maxim se numeşte **punct de extrem**.

Teorema lui Fermat de la funcţii reale de o variabilă reală afirmă că dacă o funcţie are derivată într-un punct de extrem din interiorul unui interval, atunci derivata este nulă în acel punct.

Putem generaliza această teoremă pentru funcţii reale de mai multe variabile reale.

Teorema 2.1. Dacă o funcţie $f: D \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ definită pe o mulţime nevidă şi deschisă este diferenţiabilă într-un punct de extrem $x_0 \in D$, atunci $df(x_0) = 0$.

Definiţia 2.1. *Orice punct interior $x_0 \in D$ în care f este diferenţiabilă şi $df(x_0) = 0$ se numeşte **punct critic** sau **punct staţionar**.*

Scanned with OKEN Scanner

Observaţia 2.1. Teorema 3.2.1. afirmă că punctele de extrem interioare mulţimii de definiţie sunt în mod necesar puncte critice.

Definiţia 2.2. *Orice punct critic care nu este punct de extrem se numeşte* ***punct şa.***

O consecinţă a Teoremei lui Fermat este următoarea :

Dacă f are derivate parţiale şi x_0 este un punct de extrem pentru f, atunci $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = 0$.

Dacă notăm cu $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0), \quad i, j = \overline{1,k}$ şi

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix}, \quad r = \overline{1,k}$$

atunci :

i) condiţia ca x_0 să fie **punct de minim** este echivalentă cu condiţiile $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_k > 0$.

ii) condiţia ca x_0 să fie **punct de maxim** este echivalentă cu condiţiile $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0, \ldots$.

Ne vom ocupa de cazul funcţiei de două variabile.

Fie $f : D \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, f = f(x,y) astfel încât să aibă derivate parţiale de ordinul II continue în $D \subseteq \mathbf{R}^2$.

Scanned with OKEN Scanner

i) dacă $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$ şi $r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0$,

$r_0t_0-s_0^2>0$, cu $t_0=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$, $s_0=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$,

atunci punctul (x_0,y_0) realizează un **minim** pentru f.

ii) dacă $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$ şi $r<0$, $r_0t_0-s_0^2>0$,

atunci punctul (x_0,y_0) realizează un **maxim** pentru f.

iii) dacă $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$ şi $r_0t_0-s_0^2<0$,

atunci punctul (x_0,y_0) nu este punct de extrem pentru f, fiind **punct şa**.

Exemplul 5. Aflați punctele de extrem local pentru funcția $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

Soluție. Vom afla întâi punctele critice (staționare) ca fiind soluțiile sistemului

$$\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-3y=0 \\ 3y^2-3x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0, y_1=0 \\ x_2=1, y_2=1 \end{cases}$$

adică (0,0) şi (1,1) sunt puncte staționare. Calculăm derivatele parțiale de ordinul II :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y.$$

Pentru punctul (0,0),

$$r_0t_0-s_0^2=-9<0,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci (0,0) este punct şa.

Pentru punctul (1,1),

$$r_0 t_0 - s_0^2 = 27 > 0\,,\ r_0 = 6,$$

deci (1,1) este punct de minim.

În continuare vom prezenta **aplicaţii economice** ale punctelor de extrem pentru funcţii de mai multe variabile. Acestea constau în **minimizarea costurilor** respectiv **maximizarea profitului**.

Dacă o firmă fabrică un anumit produs, se poate determine în urma unor studii economice funcţia de cost C şi profitul P, acestea fiind funcţii de mai multe variabile.

Firma are interesul de a găsi minimul lui C şi maximul lui P. Astfel, apar probleme de extrem pentru funcţii de mai multe variabile.

Exemplul 6. Funcţia de cost, definită pentru $x > 0$, $y > 0$ este

$$C(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y\,.$$

Se determină uşor că singurul punct staţionar cu $x > 0$, $y > 0$ este (2,1). Calculând

$$r_0 t_0 - s_0^2 > 0$$

şi

$$r_0 > 0,$$

rezultă că punctul (2,1) este **punct de minim pentru funcţia de cost** C(x,y).

Exemplul 7. Profitul firmei este

$$P(x,y) = -2x^2 + 2xy - 5y^2 + 6x + 6y\,.$$

Singurul punct staţionar cu $x > 0$, $y > 0$ este (2,1). Calculând

Scanned with OKEN Scanner

$$r_0 t_0 - s_0^2 < 0,$$

rezultă că punctul (2,1) este **punct de maxim pentru funcția profit** P(x,y).

3.3. Aplicații propuse

1. Să se arate că funcția

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, (x,y) \neq (0,0)$$

nu are limită în origine.

2. Calculați limitele iterate şi limita globală în origine pentru funcția $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, (x,y) \neq (0,0)$.

3. Să se determine valoarea marginală VM în raport cu variabila x, ritmul de variație R şi elasticitatea E pentru funcțiile :

a) $f(x,y,z) = xy + xz + yz$

b) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^3 + 1)$

4. Să se determine punctele de extrem local pentru funcțiile :

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 100$

b) $f(x,y) = xy^2 e^{x-y}, \quad x < 0$

c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$

5. Funcția de cost, definită pentru $x > 0, y > 0$ este

$$C(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}.$$

Găsiți valoarea costului minim.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÂI ŞI ECUAȚII DIFERENȚIALE LA CARE SE POATE REDUCE ORDINUL

4.1. Generalități

Fie Ω un domeniu (mulțime deschisă şi conexă) nevid din spațiul R^{n+2} şi $F:\Omega \to R$ o funcție continuă.

Prin ecuație diferențială de ordinul n generată de F şi notată:

$$(1.1.1) \quad F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$$

vom înțelege găsirea acelei funcții $\varphi: I \to R$ (unde I este un interval al dreptei reale, care depinde de φ) cu proprietățile:

1). $\varphi \in \varphi^n(I)$

2). $\varphi(x,\varphi(x),\varphi'(X)),...,\varphi^{(n)}(x)=0 \in \Omega$ şi are loc egalitatea:

$F(x,\varphi(x),\varphi'(X)),...,\varphi^{(n)}(x)=0$

O funcție φ cu proprietățile de mai sus va fi numită soluție pe I, a ecuației diferențiale considerate.

În cazul n=1, von zice că ecuația diferențială (1.1.1) este de ordinul I, iar pentru $n \geq 2$ vom zice că (1.1.1) este o ecuație diferențială de orin superior.

Fie:

$$\Omega_0 = \{(x,y,y_1,...,y_{n-1}) \in R^{n+1} / (\exists y_n \in R \quad cu \quad (x,y,y_1,...,y_{n-1},y_n) \in \Omega)\}$$

Prin soluție a problemei Cauchy pentru ecuația (1.1.1), cu datele inițiale $(x,y^0,y_1^0,...,y_{n-1}^0) \in \Omega_0$ notată prin:

Scanned with OKEN Scanner

$$(1.1.2)\quad \begin{cases} F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0 \\ y(x_0)=y^0 \\ y'(x_0)=y_1^0 \\ \text{---------} \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}^0 \end{cases}$$

vom înțelege o soluție φ a ecuației (1.1.1) care are simultan proprietățile:

3) $x_0 \in I$ şi $\varphi(x_0)=y^0, \varphi'(x_0)=y_1^0, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}^0$

Dacă există $f:\Omega_0 \to R$ continuă, astfel încât:

$$F(x,y,y_1,\ldots,y_n)=y_n-f(x,y,y_1,\ldots,y_{n-1}) \text{ pe } \Omega$$

atunci ecuația (1.1.1) poate fi scrisă sub forma:

$$(1.1.3)\qquad y^{(n)}=f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$$

şi va fi numită ecuație diferențială de ordinul n sub formă normală; în particular, o ecuație diferențială de ordinul I, sub formă normală se scrie:

$$(1.1.4)\qquad y'=f(x,y)$$

unde f este o funcție reală , continuă pe un anumit domeniu din R^2.

4.2. Ecuații diferențiale de ordinul I sub formă normală

4.2.1. Ecuații diferențiale cu variabile separabile

Fie $f:(a,b)\to R,\ g:(c,d)\to R$ două funcții continue.

Ecuația diferențială

$$(1.2.1)\qquad y'=f(x)g(y)$$

poartă numele de **ecuație diferențială cu variabile separabile.**

Pentru rezolvare vom presupune că $g(y)\neq 0, \forall y\in(c,d)$

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\varphi: I \to R$ o soluție a acuației considerate, adică $\varphi \in \varphi'(I), \varphi(x) \in (c,d)$ şi $\varphi'(x) = f(x) \cdot g(\varphi(x))$ pentru orice $x \in I$

Prin împărțire cu $g(\varphi(x)) \neq 0$, rezultă:

$$\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x)$$

iar prin integrare deducem

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(u)}{g(\varphi(u))} du = \int_{x_0}^{x} f(s)ds, \quad x_0, x \in I$$

Astfel, dacă G este o primitivă pe (c,d) a funcției $\frac{1}{g}$, putem scrie:

$$G(\varphi(x)) - G(\varphi(x_0)) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds$$

sau

$$G(\varphi(x)) = G(\varphi(x_0)) + \int_{x_0}^{x} f(s)ds$$

de unde

$$(1.2.2) \qquad \varphi(x) = G^{-1}(G(\varphi(x_0)) + \int_{x_0}^{x} f(s)ds), \forall x \in I$$

Să remarcăm că datorită ipotezei $g(y) \neq 0$, funcția G este strict monotonă pe (c,d) şi deci inversabilă.

Rezultă de aici că orice soluție $\varphi: I \to R$ a ecuației (1.2.1) este unic definită de valoarea sa într-un punct $x_0 \in I \subset (a,b)$ prin formula (1.1.2)

Fie acum $x_0 \in (a,b), y_0 \in (c,d)$. Definim funcția:

$$\varphi(y) = G^{-1}(G(y_0) + \int_{x_0}^{x} f(s)ds), \quad x \in I$$

unde I este un interval ce conține punctul x_0 şi este conținut în mulțimea deschisă:

Scanned with OKEN Scanner

$$M = \{x \in (a,b) / G(y_0) + \int_{x_0}^{x} f(s)ds) \in G(c,d)\}$$

Prin derivare directă deducem că φ este soluție pe I a ecuației (1.1.1) şi în plus că $\varphi(x_0) = y_0$, adică φ este o soluție pe I pentru problema Cauchy:

$$(1.2.3) \qquad \begin{cases} y' = f(x) \cdot g(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Din cele relatate mai sus deducem că pentru fiecare $x_0 \in (a,b), y_0 \in (c,d)$, există un interval I⊂(a,b) care conține punctul x_0 şi o soluție (unică) pe I a problemei Cauchy (1.2.3.). Soluția este definită implicit de egalitatea :

$$G(y) = G(y_0) + \int_{x_0}^{x} f(s)ds$$

unde G este o primitivă a funcției $\frac{1}{g}$.

Observație. Raționamentele de mai sus au fost făcute în ipoteza că $g(y) \neq 0$ oricare ar fi $y \in (c,d)$. Dacă există $y_0 \in (c,d)$ cu proprietatea $g(x_0) = 0$ atunci funcția $\varphi : (a,b) \to R, \varphi(x) = y_0, \forall x \in (a,b)$ este soluție a ecuației (1.2.1) (şi a problemei Cauchy (1.2.3)) cu x_0 arbitrar în (a,b).

O astfel de soluție (constantă) este numită **soluție staționară** a ecuației (1.2.1).

De remarcat că în această situație, pe acelaşi interval I pot exista mai multe soluții ale problemei Cauchy (1.2.3).

Într-adevăr, dacă vom considera ecuația:

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}, x \in R, y \in R$$

Constatăm că funcția $g(y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ se anulează pentru $y_0 = 0$, dacă $\varphi(y) = 0, \forall y \in R$ este soluție pe R a acuației date.

Este uşor de văzut însă că pentru orice $x_0 \in R, y_0 \in R$ funcțiile

Scanned with OKEN Scanner

$$\varphi_\alpha(y)=\begin{cases}0 & y>x_0-y_0^{1/3}\\ (y_0^{1/3}+x-x_0)^3 & \alpha<y<x_0-y_0^{1/3}\\ (y-2)^3 & y<\alpha\end{cases}$$

sunt soluții pe R ale problemei Cauchy (1.1.3) oricare ar fi $\alpha \le x_0 - y_0^{1/3}$.

În practică, pentru găsirea soluțiilor ecuației cu variabile separabile (1.1.1) se rezolvă mai întâi ecuația $g(y)=0$, care furnizează soluțiile staționare ale ecuației date.

După eliminarea din (c,d) a punctelor care anulează funcția g, putem răsfrânge studiul ecuației (1.1.1) la domenii de forma $(a,b)\times(c_1,d_1)$ cu $g(y)\neq 0$ oricare ar fi $y\in(c,d)$. Pentru un astfel de domeniu găsirea soluțiilor revine la separarea variabilelor:

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$$

Şi rezolvarea unei probleme de funcții implicite

$$\int_{y_0}^{y}\frac{1}{g(u)}du=\int_{x_0}^{x}f(s)ds$$

sau

$$G(y)=G(y_0)+\int_{x_0}^{x}f(s)ds$$

unde G este o primitivă oarecare a funcției $\frac{1}{g}$.

4.2.2. Ecuații diferențiale omogene

Fie $f:(a,b)\to R$ o funcție continuă pe (a,b).
O ecuație diferențială de forma:

Scanned with OKEN Scanner

(1.2.4) $$y' = f(\frac{y}{x}), x \neq 0, \frac{y}{x} \in (a,b)$$

va fi numită ecuație diferențială de ordinul I, omogenă.

Dacă φ este o soluție pe I a ecuației (1.2.4) atunci $0 \notin I, \varphi'(I)$ și pentru fiecare $x \in I$

$$\frac{\varphi(x)}{x} \in (a,b), \varphi'(x) = f\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)$$

Să notăm $\psi(x) = -\frac{1}{x^2}\varphi(x) + \frac{1}{x}\varphi'(x) = -\frac{1}{x}\psi(x) + \frac{1}{x}f(\psi(x))$,

Astfel că ψ este soluție pe I a ecuației diferențiale cu variabile separabile

(1.2.5) $$u' = \frac{1}{x}[\varphi(x) - x]$$

Reciproc, dacă $\psi : I \to R$ este o soluție pe $I \neq 0$ a ecuației cu variabile separabile (1.2.5) atunci funcția:

$$\varphi : I \to R, \ \varphi(x) = x\psi(x)$$

verifică

$$\varphi'(x) = \varphi(x) + x\varphi'(x) = f\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)$$

deci este soluție pe I a ecuației omogene (1.2.4)

În practică, rezolvarea ecuației (1.2.4) se face prin schimbarea de funcție $u = \frac{y}{x}$, de unde rezultă $u' = -\frac{1}{x^2}y + \frac{1}{x}y'$, deci ecuația (1.2.4) devine:

$$u' = \frac{1}{x}[f(u) - u]$$

care este o ecuație cu variabile separabile. Soluțiile celor două ecuații sunt legate prin schimbarea $y(x) = xu(x)$

Observație. Fie $\Omega \subset R^2$ un domeniu de forma:

$$\Omega = \left\{(x,y) \in R^2 / x > 0, \frac{y}{x} \in (a,b)\right\}$$

și $g : \Omega \to R$ o funcție continuă, omogenă și de ordinul zero; adică

Scanned with OKEN Scanner

$g(\lambda x, \lambda y) = g(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega$ şi $\forall \lambda > 0$. Atunci, în particular pentru $\lambda = \frac{1}{x} > 0$ găsim

$$g(1, \frac{y}{x}) = g(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

şi notând $f(\frac{y}{x}) = g(1, \frac{y}{x})$, constatăm că ecuaţia:

$$y' = g(x, y)$$

poate fi scrisă $y' = f(\frac{y}{x})$

adică este o ecuaţie diferenţială omogenă care se rezolvă , conform celor de mai sus, prin schimbarea de funcţie $u = \frac{y}{x}$

O situaţie similară se obtine dacă:

$$\Omega = \left\{(x, y) \in R^2 / x < 0, \frac{y}{x} \in (a, b)\right\}$$

şi $g : \Omega \to R$ este o funcţie continuă, omogenă şi de ordinul zero.

De remarcat că pentru ecuaţii omogene domeniul Ω are în planul R^2 o reprezentare de forma dată în Fig. 1.

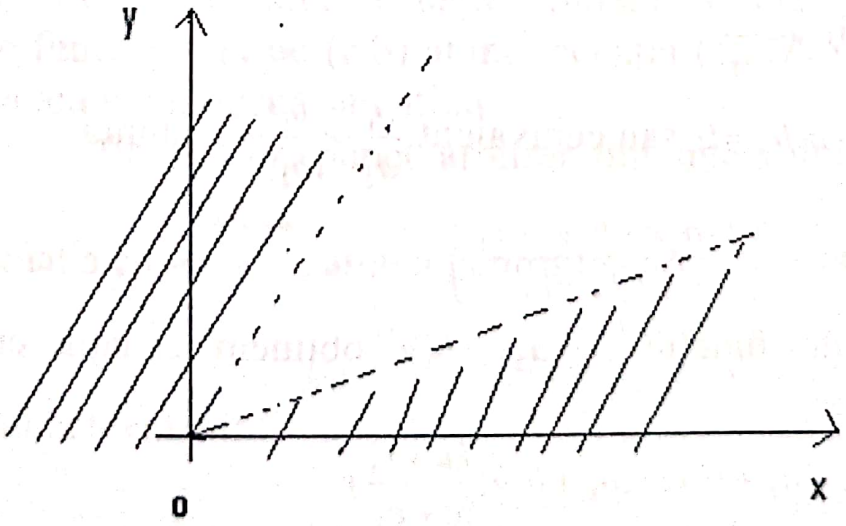


Fig 1 (x > 0)

Scanned with OKEN Scanner

O ecuație diferențială de forma :

$$(1.2.6) \qquad y' = g\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

unde $a_i, b_i, c_i \in R, (i = 1,2)$ poate fi redusă la o ecuație omogenă în felul următor:

1.) Dacă $a_1b_1 - a_2b_2 \neq 0$ atunci sistemul algebric

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

are soluție unică $x = x_0, y = y_0$.

Efectuam schimbarea de variabilă $x = s + x_0$ şi notăm $u(s) = y(s + x_0) + y_0$

Obținem astfel:

$$u'(s) = \frac{dy(s + x_0)}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dx}(s + t_0)$$

de unde, folosind inecuația dată, obținem că funcția u este soluție a ecuației diferențiale omogene:

$$u'(s) = g\left(\frac{a_1s + b_1u}{a_2s + b_2u}\right)$$

ecuația , ce poate fi redusă la o ecuație cu variabile separabile prin schimbarea de funcții $v = \frac{u}{s}$

2.) Dacă $a_1b_1 - a_2b_2 = 0$ sau echivalent $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$ atunci:

$$y' = g\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

şi cu schimbarea de funcție $u = a_2x + b_2y$ obținem ecuația cu variabilele separabile:

$$u' = a_2 + b_2y' = a_2 + b_2g\left(\frac{ku + c_1}{u + c_2}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

În ambele cazuri soluțiile ecuației diferențiale date inițial se obține din soluțiile ecuației cu variabile separabile rezultate în urma schimbărilor de funcție și de variabila considerată.

Astfel în cazul 1).

$$y(x) = u(x - x_0) - x_0 = (x - x_0)V(x - x_0) - x_0$$

iar în cazul 2) soluțiile căutate rezultă din egalitatea

$$u(x) = a_2(x) + b_2 y(x)$$

4.2.3. Ecuații diferențiale liniare de ordinul I

Numim ecuație diferențială de ordinul I o ecuație diferențială de forma:

(1.2.7) $$y' = f(x)y + g(x)$$

unde f și g sunt două funcții definite și continue pe un interval $I = (a,b)$.

Dacă $g(x) = 0$ pentru orice $x \in I$, atunci (1.2.7) se scrie:

(1.2.8) $$y' = f(x)y$$

și va fi numită ecuație liniară omogenă. Dacă g este de funcție nulă pe (a,b) atunci ecuația (1.2.7) va fi numită ecuație liniară neomogenă sau afină .

Fie x_0 un punct arbitrar din intervalul I. Dacă înmulțim ecuația cu $e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds}$, atunci pentru fiecare $x \in I$ vom putea scrie:

$$y' e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds} = f(x)e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds} \cdot y = g(x)e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds}$$

sau echivalent:

$$\frac{d}{dt} y e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds} = g(x)e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds}$$

Rezultă de aici:

Scanned with OKEN Scanner

$$y(x)e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds} - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} g(u)e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds} du$$

şi prin urmare:

$$(1.2.9) \qquad y(x) = y(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds} + \left(\int_{x_0}^{x} g(u)e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds} du\right) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds}$$

Din cele de mai sus deducem că orice soluţie a ecuaţiei afine (1.2.7) este definită pe I şi este unic determinată de valoarea sa într-un punct $x_0 \in I$.

Astfel, funcţia definită pe I prin:

$$y(x) = x_0 e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds} + \int_{x_0}^{x} g(u)e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds} du, \quad \forall x \in I$$

Este unica soluţie a problemei Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x)y + g(x) \\ y(x_0) = x_0 \end{cases}$$

În particular, ecuaţia liniară şi omogenă(1.2.8) are pe I soluţia:

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds}$$

aceasta fiind unica soluţie a ecuaţiei (1.2.8) cu proprietatea $y(x_0) = y_0$.

Observaţie. Dacă $g(x) = 0$ pentru orice $x \in I$, atunci ecuaţia liniară omogenă (1.2.8) poate fi considerată ecuaţie cu variabile separabile a cărei rezolvare revine la separarea variabilelor:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y$$

şi rezolvarea unei probleme de funcţii implicate:

$$\ln y = \ln y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s)ds$$

deci

Scanned with OKEN Scanner

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds}, \quad y_0 \in R, x_0 \in I$$

sau având în vedere că y_0 este număr real arbitrar putem scrie:

$$y(x) = c_0 e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds}, \quad c \in R$$

Rezolvarea ecuației afine (1.2.7) se poate face utilizând şi metoda variației de constante a lui Lagrange care constă în determinarea funcției $c \in \varphi'(I)$ astfel încât:

$$y(x) = c(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds} \tag{1.2.10}$$

să fie soluție a ecuației (1.2.7)

Înlocuind (1.2.10) în ecuația (1.2.7) obținem:

$$c'(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds} + f(x)c(x)e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds} = f(x)c(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds} + g(x)$$

deci

$$c'(x) = g(x)e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds}$$

Rezultă de aici că:

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} g(u)e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds} du + k, \quad k \in R$$

şi astfel funcția:

$$y(x) = (k + \int_{x_0}^{x} g(u)e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds} du) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds}, \quad k \in R$$

sau:

$$y(x) = ke^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds} + (\int_{x_0}^{x} g(u)e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds} du, \quad k \in R \tag{1.2.11.}$$

este soluție pe I a ecuației diferențiale liniare şi neomogene (1.2.7).

Ecuația (1.2.7) nu are alte soluții pe I decât cele care rezultă din formula (1.2.11) prin particularizarea constantei $k \in R$. Din

Scanned with OKEN Scanner

acest motiv formula (1.2.11) este numită **soluția generală a ecuației** (1.2.7).

Dacă pentru ecuația liniară neomogenă (1.2.7) se cunoaşte o soluție particulară $\varphi_0(x)$ atunci soluția generală a ecuației este dată de:

$$y(x) = ke^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds} + \varphi_0(x), \quad x \in R$$

Într-adevăr, se verifică prin calcul direct că funcția de mai sus este soluție a ecuației (1.2.7) pentru orice $k \in R$. Pe de altă parte dacă φ este soluție a ecuației (7), atunci:

$$\varphi'(x) - \varphi_0'(x) = f(x)[\varphi(x) - \varphi_0(x)]$$

şi deci (fiind soluție a ecuației omogene (1.2.8))

$$\varphi(x) - \varphi_0(x) = [\varphi(x_0) - \varphi_0(x_0)]e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds}, \quad x \in I$$

de unde, notând $k = \varphi(x_0) - \varphi_0(x_0)$ deducem că:

$$\varphi(x) = ke^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds} + \varphi_0(x), \quad \forall x \in I$$

4.2.4. Ecuații diferențiale de tip Bernoulli

Fie f.g: $I = [a,b] \to R$ două funcții continue şi $\alpha \in R$.

Numim ecuație diferențială de tip Bernoulli o ecuație diferențială de forma:

(1.2.12) $$y' = f(x)y + g(x)y^{\alpha}$$

Dacă $\alpha = 0$ sau $\alpha = 1$ ecuația (1.2.12) descrie ecuație diferențială afină:

$$y' = f(x)y + g(x)$$

sau, respectiv ecuație liniară omogenă

$$y' = f(x)y + g(x)y$$

Scanned with OKEN Scanner

Din acest motiv, în cele ce urmează, vom considera $\alpha \neq 0$ şi $\alpha \neq 1$.

În general vorbind, va trebui să căutăm soluții (strict) pozitive ale ecuației (1.2.12). împărțind ecuația (1.2.12) prin y^{α}, obținem:

$$y^{-\alpha} y' = f(x) y^{1-\alpha} + g(x)$$

Prin schimbarea de funcție $u = y^{1-\alpha}$ deducem că:

$$u' = (1-\alpha) y^{-\alpha} y' = (1-\alpha) f(x) u + (1-\alpha) g(x)$$

Deci u este soluție a ecuației liniare neomogene

(1.2.13) $\quad u' = (1-\alpha) f(x) u + (1-\alpha) g(x)$

Reciproc orice soluție a ecuației (1.2.13) conduce la o soluție a ecuației de tip Bernoulli (1.2.10) dacă avem în vedere schimbarea de funcție efectuată. Obținem astfel că:

(1.2.14) $\quad y(x) = u(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

4.2.5. Ecuații diferențiale de tip Riccati

Fie f, g, h : $I = (a,b) \to R$ trei funcții continue pe (a,b).

Numim ecuație diferențială de tip Riccati, generată de funcțiile f, g şi h , ecuația diferențială:

(1.2.15) $\quad y' = f(x) y^2 + g(x) y + h(x)$

În general, ecuația diferențială de tip Riccati nu poate fi rezolvată prin utilizarea primitivelor sau prin schimbări de funcții sau (şi) de variabilă, decât în anumite cazuri particulare.

Cel mai important în aplicații este cazul când se cunoaşte o soluție particulară a ecuației considerate.

Fie deci, $\varphi_0 : J \subset I \to R$ o soluție particulară a ecuației (1.2.15).

Obținem: $\quad C_0'(x) = f(x)\varphi_0^2(x) + g(x)\varphi_0(x) + h(x), \forall x \in J$

Scanned with OKEN Scanner

iar dacă facem schimbarea de funcție

$$u = y - \varphi_0(x)$$

deducem

$$u' = y' - \varphi_0'(x)$$

şi, în virtutea ecuației, avem:

$$u' = f(x)(y^2 - \varphi_0^2(x)) + g(x)(y - \varphi_0(x)).$$

Dacă avem în vedere schimbarea de funcție efectuată, atunci

$$u' = f(x)(y - \varphi_0(x))(y - \varphi_0(x)) + 2\varphi_0(x) + g(x)(y - \varphi_0(x))$$

deci u este soluție a ecuației diferențiale de tip Bernoulli

(1.2.16) $$u' = f(x)u^2 + [2f(x)\varphi_0(x) + g(x)]u.$$

După găsirea soluțiilor ecuației diferențiale de tip Bernoulli (1.2.16), soluțiile ecuației (1.2.15) se deduc din egalitatea (schimbare de funcție):

$$J(x) = u(x) + \varphi_0(x)$$

Observație. Deoarece în ecuația Bernoulli avem $\alpha = 2$, rezultă că pentru a rezolva este necesară o nouă schimbare de funcție şi anume $z = u^{-1}$ sau echivalent $u=z^{-1}$.

Deducem de aici că prin schimbarea

$$y = \frac{1}{2} + \varphi_0(x)$$

ecuația diferențială de tip Riccati (1.2.15) se va reduce la o ecuație diferențială liniară neomogenă pentu funcția necunoscută z.

Din cele precizate la rezolvarea ecuației diferențiale liniare neomogene ştim că soluția generală a unei asrfel de ecuații este de forma:

$$z(x) = k\varphi(x) + \psi(x), k \in R$$

unde φ şi ψ sunt funcții ce se obțin coeficienții ecuației liniare considerate.

În concluzie, soluția generală a unei ecuații de tip Riccati are forma:

Scanned with OKEN Scanner

(1.2.17) $$J(x)=\frac{k\varphi_1(x)+\psi_1(x)}{k\varphi(x)+\psi(x)}, k\in R$$

unde : $\varphi_1(x)=\varphi(x)\varphi_0(x), \psi_1(x)=1+\psi(x)\varphi_0(x)$

Să remarcăm acum că dacă pentru ecuaţia Riccati se cunosc două soluţii particulare φ_0 şi φ_1, atunci pentru ecuaţia liniară obţinută după schimbarea de funcţie prezentată mai sus se cunoaşte o soluţie particulară. Într-adevăr din egalitatea:

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{z(x)}+\varphi_0(x)$$

rezultă soluţia particulară:

$$z_0(x)=\frac{1}{\varphi_1(x)-\varphi_0(x)}$$

care poate fi utilizată în rezolvarea ecuaţiei liniare obţinute.

În sfârşit, să remarcăm că patru soluţii diferite ale ecuaţiei Riccati

$$\varphi_i(x)=\frac{k_i\varphi_1(x)+\psi_1(x)}{k_i\varphi(x)+\psi(x)} \qquad i=1,2,3,4$$

au proprietatea

$$\frac{\varphi_4(x)-\varphi_1(x)}{\varphi_4(x)-\varphi_2(x)}:\frac{\varphi_3(x)-\varphi_1(x)}{\varphi_3(x)-\varphi_2(x)}=\frac{k_4-k_1}{k_4-k_2}:\frac{k_3-k_1}{k_3-k_2}=k$$ (nu depinde de x).

Rezultă de aici că dacă cunoaştem trei soluţii diferite ale ecuaţiei Riccati, atunci soluţia generală a ecuaţiei poate fi obţinută din egalitatea:

(1.2.18) $$\frac{y-\varphi_1(x)}{y-\varphi_2(x)}:\frac{\varphi_3(x)-\varphi_1(x)}{\varphi_3(x)-\varphi_2(x)}=k, k\in R$$

Scanned with OKEN Scanner

4.2.6. Ecuaţii diferenţiale exacte. Factor integrant.

Fie $\Omega \subset R^2$ un domeniu şi $f, g : \Omega \to R$ două funcţii continue. Vom presupune $g(x, y) \neq 0$ oricare ar fi $(x, y) \in \Omega$ şi considerăm ecuaţia diferenţială:

$$y' = -\frac{f(x, y)}{g(x, y)}. \tag{1.2.19}$$

Dacă φ este o soluţie pe intervalul I=(a,b)$\subset R$ a ecuaţiei date, atunci $(x, \varphi(x)) \in \Omega, \forall x \in I$ şi, în plus,

$$\varphi'(x) = -\frac{f(x, \varphi(x))}{g(x, \varphi(x))}$$

de aceea, diferenţiala funcţiei φ verifică egalitatea

$$d\varphi(x) = -\frac{f(x, \varphi(x))}{g(x, \varphi(x))} dx$$

sau

$$f(x, \varphi(x))dx + g(x, \varphi(x))d\varphi(x) = 0.$$

Obţinem astfel scrierea sub formă diferenţială a ecuaţiei (1.2.19).

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0. \tag{1.2.20}$$

De remarcat că orice ecuaţie diferenţială de ordinul I sub formă normală, $y' = f(x, y)$, admite o scriere diferenţială de forma (1.2.20) dacă punem g(x,y)=-1, astfel că putem scrie:

$$f(x,y)dx-dy=0.$$

Vom spune că ecuaţia (1.2.19) sau (1.2.20) este o ecuaţie diferenţială exactă (sau o ecuaţie cu diferenţială totală) dacă există o funcţie $U \in C'(\Omega)$ astfel încât:

$$dU = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} dy = f(x, y)dx + g(x, y)dy.$$

Astfel spus (1.2.19) sau (1.2.20) este ecuaţie diferenţială exactă dacă există $U \in C'(\Omega)$ pentru care

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)=f(x,y),\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)=g(x,y),\forall(x,y)\in\Omega$$

Dacă $U\in C^2(\Omega)$ atunci

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}(x,y).$$

Dacă vom presupune deci că $f,g\in C'(\Omega)$ şi ecuaţia (1.2.19) este cu diferenţială exactă atunci $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\forall(x,y)\in\Omega$

Afirmaţia reciprocă este de asemenea adevărată în sensul că dacă $f,g\in C'(\Omega)$ şi are loc egalitatea:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\forall(x,y)\in\Omega$$

atunci ecuaţia (1.2.19) este cu diferenţială exactă, iar funcţia U poate fi obţinută din egalitatea

$$\mathrm{U(x,y)\text{-}U(x_0,y_0)}=\int_{x_0}^{x}f(s,y)ds+\int_{y_0}^{y}g(x_0,u)du$$
$$=\int_{x_0}^{x}f(s,y_0)ds+\int_{y_0}^{y}g(x,u)du.$$

Într-adevăr, pentru orice $(x,y)\in\Omega$, vom avea:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)=f(x,y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,y)}{\partial y}ds+g(x_0,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial g(s,y)}{\partial s}ds+g(x_0,y)=$$

$$=g(x,y)-g(x_0,y)+g(x_0,y)=g(x,y).$$

Să revenim acum la rezolvarea ecuaţiei cu diferenţială exactă (1.2.19) (sau sub formă diferenţială (1.2.20)).

Dacă φ este o soluţie I=(a,b) a ecuaţiei considerate, iar $U\in C'(\Omega)$ are proprietăţile:

Scanned with OKEN Scanner

$$(1.2.21)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y) = f(x,y) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y}(x,y) = g(x,y) \end{cases}$$

atunci notând $V(x) = U(x, \varphi(x))$, deducem că:

$$V'(x) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial U}{\partial \varphi}(x,\varphi(x))\varphi'(x) = f(x,\varphi(x)) + g(x,\varphi(x))\varphi'(x), \forall x \in I$$

Din egalitatea $\varphi'(x) = -\dfrac{f(x,\varphi(x))}{g(x,\varphi(x))}, \forall x \in I$, rezultă că $V'(x) = 0, \forall x \in I$ şi deci există o constantă reală C, astfel încât

$$V(x) = U(x,\varphi(x)) = c, \forall t \in I$$

Reciproc, pentru orice constantă $c \in R$, egalitatea U(x,y)=c defineşte, implicit, o funcţie de clasă C^1 pe un interval I, care verifică relaţia:

$$U(x,\varphi(x)) = c, \forall x \in I.$$

Prin derivare, obţinem:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial U}{\partial \varphi}(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0$$

şi având în vedere proprietăţile (1.2.21) obţinem că:

$$\varphi'(x) = -\frac{f(x,\varphi(x))}{g(x,\varphi(x))}, \forall x \in I$$

astfel că φ este soluţia ecuaţiei diferenţiale exacte (1.2.19).

Din raţoonamentele precedente, rezultă că o ecuaţie diferenţială exactă este echivalentă cu determinarea funcţiei $U \in \varphi'(\Omega)$ cu proprietăţile (1.2.21) şi rezolvarea unor probleme de funcţii implicite

$$U(x,y)=c,\ c \in R.$$

În concluzie, dacă $f,g \in C'(\Omega)$, iar ecuaţia (1.2.19) (sau (1.2.20)) este cu diferenţială exactă atunci rezolvarea ecuaţiei revine la găsirea funcţiilor y, definite implicit, prin:

Scanned with OKEN Scanner

(1.2.22) $\int_{x_0}^{x} f(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} g(x_0,u)du = c, c \in R.$

În particular, pentru c=0, egalitatea:

$$\int_{x_0}^{x} f(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} g(x_0,u)du = 0$$

defineşte, implicit, soluția problemei Cauchy:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Factor integrant

Considerăm ecuația (sub formă diferențială):

f(x,y)dx+g(x,y)dy=0

unde $f, g \in C'(\Omega)$.

Dacă ecuația nu este diferențială exactă se pune problema determinării unei funcții $\mu \in C'(\Omega)$ cu proprietatea $\mu(x,y) \neq 0$ pentru orice $(x,y) \in \Omega$ astfel încât ecuația (obținută prin înmulțirea cu μ):

(1.2.23) $\mu(x,y)f(x,y)dx + \mu(x,y)g(x,y)dy = 0$

să fie diferențială exactă.

Altfel spus, se caută o funcție $\mu \in C'(\Omega), \mu(x,y) \neq 0$ pe Ω astfel încât:

(1.2.24) $$\frac{\partial(\mu f)}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial(\mu g)}{\partial y}(x,y), \forall (x,y) \in \Omega.$$

Dacă o astfel de funcție μ există, atunci aceasta poartă numele de factor integrant pentru ecuația considerată.

De remarcat că ecuațiile (1.2.20) şi (1.2.23) au aceeaşi formă normală:

Scanned with OKEN Scanner

$$y' = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

şi în consecinţă au aceleaşi soluţii.

Egalitatea (1.2.24) conduce la:

(1.2.25)

$$\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y} f(x,y) - \frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x} g(x,y) = \mu(x,y)\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right].$$

Ecuaţia (1.2.25) cu derivate parţiale, poartă numele de **ecuaţia factorului integrant**. Determinarea funcţiei μ din această ecuaţie nu este întotdeauna posibilă şi de aceea, se încearcă găsirea unor factori integranţi particulari.

De exemplu, dacă vom presupune $\mu = \mu(u(x,y))$, unde u(x,y) este o funcţie cunoscută, ecuaţia (1.2.25) devine:

(1.2.26) $$\mu'(u(x,y))\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} f(x,y) - \mu'(u(x,y))\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} =$$

$$= \mu(u(x,y))\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right]$$

sau

$$\frac{\mu'(u)}{\mu(u)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) f(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) g(x,y)}.$$

În membrul drept al egalităţii obţinute apar numai funcţii cunoscute. Dacă după efectuarea calculelor, obţinem o funcţie F care depinde numai de u(x,y) atunci ecuaţia factorului integrant se poate scrie:

$$\frac{\mu'}{\mu} = F(u)$$

Scanned with OKEN Scanner

care este o ecuație cu variabile separabile. Determinarea unui factor integrant revine deci la determinarea funcției $\mu(u)$ din egalitatea:

$$\ln \mu(u) = \int_{u_0}^{u} F(s)ds = \Phi(u)$$

de unde rezultă că putem lua

$$\mu(u(x,y)) = e^{\phi(u(x,y))}, \ \forall (x,y)$$

Printre cele mai importante cazuri particulare utilizate in aplicatii matematice :

1) u(x,y)=x, cu ecuatia factorului integrant:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)}{-g(x,y)} = F(x)$$

2) u(x,y) =y, cu ecuatia factorului integrant:

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)}{f(x,y)} = F(y)$$

3) u(x,y)=x+y , cu ecuatia factorului integrant:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)}{f(x,y) - g(x,y)} = F(x+y) = F(u)$$

4) u(x,y)=xy , cu ecuatia factorului integrant:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)}{xf(x,y) - yg(x,y)} = F(xy) = F(u)$$

Scanned with OKEN Scanner

Observatie. După determinarea factorului integrant, rezolvarea ecuatiei diferentiale considerate revine la determinarea funcției implicite y din egalitatea:

$$(1.2.27)\qquad \int_{x_0}^{x}\mu(s,y)\,f(s,y)dy+\int_{y_0}^{y}\mu(x_0,u)\,g(x_0,u)du=c\ ,\ c\in R$$

4.3. Ecuatii diferentiale de ordinul I sub forma implicită

4.3.1. Consideratii generale relative la parametrizare.

Fie ecuatia diferentiala sub forma implicita

$$(1.3.1)\qquad F(x,y,y')=0$$

la care îi asociem suprafata din R^3

$$S=\{(x,y,p)\in R^3 \mid F(x,y,p)=0\}.$$

Să presupunem că φ: $I=(a,b)\in R\to R$ este o solutie a ecuatiei considerate,deci:

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x))=0\ ,\ \forall x\in I$$

Obtinem astfel o curba

$$(C)\qquad \begin{cases} y=\varphi(x) \\ p=\varphi'(x) \end{cases},x\in I$$

situată pe suprafata S care verifica egalitatea:

$$dy=\varphi'(x)\,dx=pdx$$

Reciproc,să presupunem că

$$(c)\qquad \begin{cases} y=\varphi(x) \\ p=\psi(x) \end{cases},x\in I$$

Scanned with OKEN Scanner

este o curbă pe suprafata S care verifică (în fiecare punct al său) egalitatea dy=pdx, adică $\varphi \in \varphi'(x)$ si $\varphi'(x)\,dx = \psi(x)\,dx$

Obtinem astfel ca $\varphi'(x)=\psi(x)$ pentru orice $x \in I$ si scriind că (c) se află pe suprafata S rezultă:

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x))=0\ ,\ \forall x \in I$$

Deducem astfel că rezolvarea ecuației diferentiale implicite considerate este echivalentă cu determinarea curbelor de forma:

$$x=f(u,v)$$
$$y=g(u,v),(u,v)\in \Delta \subset R^2\ ,\ f,g \in \varphi'(\Delta)$$

În acest caz,determinarea curbelor de pe suprafata S cu proprietatea dy=pdx conduce la ecuatia diferentiala:

$$\frac{\partial g(u,v)}{\partial u}du+\frac{\partial g(u,v)}{\partial v}dv = h(u,v)(\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}du+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}dv).$$

Orice solutie $\psi = \varphi(u)$ a ecuației diferențiale precedente furnizează o curbă pe S

(c) $$x=f(u,\varphi(u))$$
$$y=g(u,\varphi(u))$$
$$p=h(u,\varphi(u))$$

cu proprietatea dy=pdx si în consecință

$$x=f(u,\varphi(u))$$
$$y=g(u,\varphi(u))$$

dă reprezentarea parametrică a unei soluții pentru ecuația implicită considerată.

4.3.2.Ecuatii diferențiale de tip Lagrange

Numim ecuatie diferentiala de tip Lagrange o ecuatie diferentiala de forma:

(1.3.2) $$y=xf(y')+g(y')$$

Scanned with OKEN Scanner

unde f si g sunt funcţii de clasa $C^1(I)$, $I=(a,b)\subset R$, iar $f(p)\neq 0$ pentru orice $p\in I$.

In acest caz

$$S=\{(x,y,p)\in R^3 \mid y=xf(p)+g(p)\}$$

şi o reprezentare a suprafeţei S este dată în forma explicită relativ la y:

$$Y=xf(p)+g(p)\ ,(x,y)\in I\times R\ .$$

Egalitatea dy=pdx conduce la ecuatia diferenţială

$$f(p)dx+[xf'(p)+g'(p)]dp=pdx$$

care poate fi scrisă sub forma normală

(1.3.3) $$\frac{dx}{dp}=\frac{f'(p)}{f(p)-p}x+\frac{g'(p)}{f(p)-p},\ p\in I$$

de unde rezultă că este o ecuaţie diferenţială de ordinul I liniară neomogenă.

Soluţia generală a ecuaţiei liniare se poate scrie:

$$x(p)=k\varphi(p)+\psi(p),\ k\in R$$

si de aceea soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale de tip Lagrange se poate scrie sub formă parametrică:

(1.3.4) $$x=k\varphi(p)+\psi(p)$$
$$y=[\,k\varphi(p)+\psi(p)]f(p)+g(p),\quad k\in R.$$

4.3.3. Ecuatii diferentiale de tip Clairaut

Se numeste ecuaţie diferenţială de tip Clairaut o ecuaţie diferenţială de forma

(1.3.5) $$y=xy'+g(y')$$

unde g este o funcţie de clasă $C^1(I)$, $I=(a,b)\subset R$.

Se constată imediat că o ecuaţie de tip Clairaut este un caz particular de ecuaţie de tip Lagrange în care f(p)=p, pentru orice $p\in I$.

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz

$$S=\{(x,y,p)\in R^3 \mid y=xp+g(p)\}$$

Deci relația dy=pdx ne va conduce la egalitatea:

$$Pdx+[x+g'(p)]dp=pdx$$

sau, după reducere

(1.3.6) $$[x+g'(p)]dp=0$$

Obținem astfel dp=0, deci p=o.

Deducem de aici ca soluția generală a ecuației Clairaut se poate obtine din egalitatea:

$$x+g'(p)=0$$

care conduce la solutia (scrisă parametric)

(1.3.7) $$x=-g'(p)$$
$$y=-p\,g'(p)+g(p)$$

si numită, în mod uzual, soluția singulară a ecuatiei Clairaut.

Se verifică uşor că soluția singulară reprezintă înfăşuratoarea familiei de drepte din solutia generală.

4.4. Ecuații de ordin superior incomplete sau cu diferite proprietăți de omogenitate

După cum s-a precizat o ecuație diferențială de ordinul n este o ecuație diferențială de forma:

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0$$

sau (sub forma normală)

$$y^n = f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}).$$

În acest paragraf ne propunem să prezentăm câteva tipuri de astfel de ecuatii al căror ordin poate fi micşorat prin schimbări convenabile de funcție sau (şi) de variabile.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvarea unei astfel de ecuaţie se va reduce astfel la rezolvarea unei ecuaţii diferenţiabile de ordin mai mic si apoi determinarea solutiilor ecuaţiei initiale pe baza schimbărilor de funcţie sau (şi) de variabilă efectuate.

Fie f:I=(a,b)→R o funcţie continuă .Considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul n:

(1.4.1) $y^{(n)}=f(x).$

Dacă luăm ca funcţie necunoscută funcţia $y^{(n-1)}=u$, ecuaţia (1.4.1) se reduce la o ecuaţie diferenţială de ordinul I

$$u'=f(x).$$

deci , orice soluţie a ecuaţie în u este de forma

$$u(x)=\int_{x_0}^{x} f(s)ds + C_1 \text{ , } C_1 \in R.$$

Astfel, având în vedere schimbarea de funcţie efectuată, deducem

$$y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x} f(s)ds + C_1$$

care este o ecuaţie de aceeaşi formă cu ecuatia (1.4.1).

Repetând procedeul, va rezulta:

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x}(\int_{x_0}^{s} f(u)du)ds + C_1(x-x_0) + C_2, C_1, C_2 \in R$$

si după n astfel de etape vom obţine ca orice solutie a ecuatiei (1.4.1) rezultă, prin particularizarea constantelor $C_1, C_2, ..., C_n \in R$, dinformula: $_0$

Scanned with OKEN Scanner

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}(\int_{x_0}^{x_1}(\int_{x_0}^{x_2}\dots(\int_{x_0}^{x_{n-1}}f(s)ds)dx_{n-1})\dots dx_2)dx_1+C_1\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+C_2\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+\dots+C_{n-1}(x-x_0)+C_n$$

sau, sub o formă uşor modificată:

$$(1.4.2)\quad y(x)=\int_{x_o}^{x}\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_2}\dots\int_{x_0}^{x_{n-1}}f(s)dsdx_{n-1}\dots dx_2dx_1$$

pe care o vom numi solutia generala a ecuatiei (1.4.1).

In particular, solutia problemei Cauchy

$$y^{(n)}=f(x)$$

$$y(x_0)=y_0^0$$

$$y'(x_0)=y_0'$$

.....

$$y_{(x_0)}^{n-1}=y_0^{n-1}$$

este unică şi este dată de formula:

$$(1.4.3)\quad \varphi(x)=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1}\dots\int_{x_0}^{x_{n-1}}f(s)dsdx_{n-1}\dots dx_1+\sum_{i=1}^{n}y_0^{i-1}\frac{(x-x_0)^{n-i}}{(n-i-1)!}$$

de unde rezulta ca putem scrie

$$(1.4.4)\quad \varphi(x)=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1}\dots\int_{x_0}^{x_{n-1}}f(s)dsdx_{n-1}\dots dx_1+\sum_{i=1}^{n}\varphi_{(x)}^{(i-1)}\frac{(x-x_0)^{n-i}}{(n-i-1)!}$$

solutia φ a ecuatiei (1.4.1).

Scanned with OKEN Scanner

O ecuație diferențială de forma

(1.4.5) $$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$$

în care lipseşte functia necunoscuta y si primele sale (k-1) derivate, poate fi redusă la o ecuatie diferențială de ordin n-k prin schimbarea de functie $u=y^{(k)}$.

Obtinem astfel ecuatia

(1.4.6) $$F(x,u,u',\ldots,u^{(n-k)})=0.$$

In acest mod ,rezolvarea ecuației (1.4.5) se reduce la rezolvarea ecuației (1.4.6), iar apoi soluțiile ecuației inițiale se obtin prin rezolvarea unei ecuatii de ordinul k de forma (1.4.1)

(1.4.7) $$y^{(k)} = u(x).$$

O ecuație diferențială de forma:

(1.4.8) $$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$$

în care lipseşte variabila independentă poate fi redusă la o ecuție de ordinul n-1 , prin schimbarea de funcție si de variabilă independentă

(1.4.9.) $$y' = u(y)$$

Rezultă de aici

$$y'' = u'(y)y' = u'(y)u(y)$$

$$y''' = u''(y)u^2(y) + u'(y)^2 u(y)$$

şi în general, derivate de ordinul k

Scanned with OKEN Scanner

$$y^{(k)} = u^{(k-1)}(y)u^{k-1}(y) + \ldots$$

se exprimă cu derivatele până la ordinul k-1 ale funcției u. Înlocuind în ecuația (1.4.3) rezultă ecuația diferențială (având ca necunoscută funcția u de variabilă y):

$$F(y,u,u'u,u''u^2 + (u')^2 u,\ldots,u^{(k-1)}u^{k-1} + \ldots) = 0$$

sau

(1.4.10.) $$\Phi(y,u,u',\ldots,u^{(n-1)}) = 0$$

Dacă putem determina functia u din ecuația (1.4.10) atunci soluțiile ecuatiei (1.4.8) se obțin rezolvând ecuația în variabile separabile

(1.4.11) $$y' = u(y)$$

În continuare vom presupune ca funcția F are anumite proprietăți de omogenitate care vor permite reducerea ordinului ecuației diferențiale considerate.

4.5. Ecuații omogene în x si dx

Vom numi astfel o ecuație diferențială care poate fi scrisă sub forma:

(1.4.8) $$F(y,xy',x^2y'',\ldots,x^n y^{(n)}) = 0$$

Vom presupune x>o (sau x<0) si vom efectua schimbarea de variabiăa:

(1.4.3) $x = e^s$ (respectiv $x = -e^s$)

după care va rezulta

$$y(x) = y(e^s) = u(s).$$

Pentru derivatele functiei y vom obtine

$$y' = \frac{d}{dx}y = \frac{du}{ds}\cdot\frac{ds}{dx}$$

şi deoarece $$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{x},$$

putem scrie

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{d}{dx}y = e^{-s}\frac{du}{ds} \quad \text{sau} \quad y' = e^{-s}u'.$$

Analog

$$y'' = \frac{d}{dx}y' = e^{-s}\frac{d}{ds}(e^{-s}u') = e^{-2s}(u'' - u').$$

Să presupunem că am obținut

$$y^{(k)} = e^{-ks}(u^{(k)} + \alpha_1 u^{(k-1)} + \ldots + \alpha_{k-1}u'),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ sunt constante, atunci

$$y^{(k+1)} = \frac{d}{dt}(y^{(k)}) = e^{-s}\frac{d}{ds}[e^{-ks}(u^{(k)} + \alpha_1 u^{(k-1)} + \ldots + \alpha_{k-1}u')] =$$

$$= e^{-s}[-ke^{-ks}(u^{(k)} + \alpha_1 u^{(k-1)} + \ldots + \alpha_{k-1}u'] + e^{-ks}(u^{(k+1)} + \alpha_1 u^{(k)} + \ldots + \alpha_{k-1}u'') =$$

$$= e^{-(k+1)s}[u^{(k+1)} + (\alpha_1 - k)u^{(k)} + (\alpha_2 - k\alpha_1)u^{(k-1)} + \ldots + (\alpha_{k-1} - k\alpha_{k-2})u'' - k\alpha_{k-1}u']$$

deci, pentru orice k $\in$ N, $1 \le k < n$, are loc egalitatea

$$x^k y^{(k)} = u^{(k)} + \alpha_1 u^{(k-1)} + \ldots + \alpha_{k-1}u'$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ sunt constante (numere întregi) ce depind de k.

Prin urmare $x^k y^{(k)'}$ se exprimă liniar prin functiile $x^k y^{(k)} = u^{(k)}, u^{(k-1)}, u'$

Înlocuind în ecuatia (1.4.12) va rezulta:

Scanned with OKEN Scanner

$$F(u,u',u''-u',...,u^{(n)}+\alpha_1 u^{(n-1)}+...+\alpha_{n-1}u')=0$$

sau

(1.4.14) $$\Phi(y,u,u',...,u^{(n)})=0$$

Deoarece funcţia φ nu contine variabila independentă s, ecuaţia (1.4.14) este de tipul (1.4.8), iar prin schimbarea de functie

$$u'=y(u)$$

i se reduce ordinul cu o unitate.

4.6. Ecuaţii diferenţiale omogene în y, x, dy, d^2y, ...,d^ny

Vom numi astfel o ecuaţie diferenţială care poate fi scrisă sub forma:

(1.4.15) $$F(\frac{y}{x},y',xy'',...,x^{n-1}y^{(n)})=0$$

unde x>0 (sau x< 0).

Dacă vom efectua schimbarea de funcţie u=$\frac{y}{x}$ sau, echivalent

(1.4.16) y=xu

va rezulta

$$y'=xu'+u$$
$$y''=xu''+2u'$$

si, în general

$$y^{(k)}=xu^{(k)}+ku^{(k-1)},\ 1\le k<n$$

Înlocuind in ecuatia (1.4.15) va rezulta

Scanned with OKEN Scanner

$$F(u, xu' + u, x^2u'' + 2xu', \ldots, x^n u^{(n)} + x^{n-1}u^{(n-1)}) = 0$$

sau

(1.4.17) $$\Phi(u, xu' x^2u'', \ldots, x^n u^{(n)}) = 0$$

Ecuatia (1.4.17) este omogenă în x si dx ,prin urmare, conform celor arătate la punctul precedent, putem sa-i reducem ordinul cu o unitate.

4.7. Ecuatii diferentiale omogene in $y, y', \ldots, y^{(n)}$

Vom numi astfel o ecuație diferențială care poate fi scrisă sub forma

(1.4.18) $$F(x, \frac{y'}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}) = 0$$

Efectuând schimbarea de funcție

(1.4.19) $$\frac{y'}{y} = u$$

obtinem prin derivare

$$\frac{y''y - y'^2}{y^2} = u'$$

sau

$$\frac{y''}{y} = u' + (\frac{y'}{y})^2 = u' + u^2$$

Scanned with OKEN Scanner

Analog

$$\frac{y'''}{y} = u'' + 3uu' + u^3$$

si, prin recurență, se arată că pentru $1 \le k < n$

$$\frac{y^{(k)}}{y} = u^{(k-1)} + P_k(u, u', ..., u^{(k-2)}.$$

unde P_k este un polinom în $u, u', ..., u^{(k-2)}$.

Dacă înlocuim în ecuatia (1.4.18) va rezulta:

$$F(x, u, u' + u^2, ..., u^{(n-1)} + P_n(u, u', ..., u^{(n-2)}.) = 0$$

sau

(1.4.20) $$\Phi(x, u, u', ..., u^{(n-1)}) = 0$$

care este o ecuație de ordinul n-1.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL V

ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE DE ORDIN SUPERIOR

5.1. Proprietăți generale ale soluțiilor

Numim ecuație diferențială de ordinul n o ecuație diferențială de forma:

(2.1.1)

$$A_0(x)y^{(n)} + A_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}(x)y' + A_n(x)y = F(x)$$

unde A_i, $i=0,1,2,\ldots,n$ şi F sunt funcții reale definite şi continue pe un interval I=(a,b)⊂R cu $A_0(x) \neq 0$, pentru orice $x \in (a,b)$.

Împărțind cu $A_0(x)$ ambii membri ai ecuației (2.1.1) şi notând $a_i(x) = \frac{A_i(x)}{A_0(x)}$, $i=1,2,\ldots,n$; $f(x) = \frac{F(x)}{A_0(x)}$ obținem că orice ecuație diferențială liniară de ordinul n se poate scrie sub forma:

$$(2.1.2) \quad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

În continuare vom considera numai ecuații diferențiale scrise sub forma (2.1.2).

Vom zice că o ecuație diferențială liniară de ordinul n este omogenă dacă $f(x)=0$ oricare ar fi $x \in I$, iar în caz contrar vom zice că ecuația este neomogenă.

Definim operatorul $L : \varphi^n(I) \to \varphi(I)$ prin

$$L(\varphi)(x) = \varphi^n(x) + a_1(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}(x)\varphi'(x) + a_n(x)\varphi(x)$$

Scanned with OKEN Scanner

şi constatăm, utilizând proprietăţile derivatelor, că

$$L(\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha L(\varphi)+\beta L(\psi),\ \forall\alpha,\beta\in R,\ \varphi,\psi\in\varphi^n(I)$$

adică L este un operator liniar.

Rezolvarea ecuaţiei (2.1.2) revine la găsirea funcţiilor $\varphi\in\varphi^n(I)$ cu proprietatea

$$L(\varphi)=f$$

Definiţia 5.1.1. *Numim wronskianul funcţiilor* $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\in\varphi^n(I)$ *determinantul:*

$$W(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)=\begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n\\ \varphi_1' & \varphi_2' & \ldots & \varphi_n'\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}\end{vmatrix}$$

Din definiţie rezultă că $W(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)$ este o funcţie de clasă $C'(I)$, oricare ar fi funcţiile $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\in\varphi^n(I)$.

Propoziţia 5.1.1. *Dacă funcţiile* $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\in\varphi^n(I)$ *sunt liniar dependente (există numerele reale* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ *nu toate nule, astfel încât* $\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\ldots+\alpha_n\varphi_n(x)=0$ *oricare ar fi* $x\in I$*) atunci* $W(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)=0$.

Demonstraţie.

Din egalitatea

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(x)=0,\ \forall x\in I$$

Deducem, prin derivare de k ori

Scanned with OKEN Scanner

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi^{(k)}(x)=0,\quad \forall\ x\in I \text{ şi } \forall\ k=1, 2, \ldots, n-1$$

Rezultă de aici că sistemil liniar

$$\begin{cases} \alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\ldots+\alpha_n\varphi_n(x)=0 \\ \alpha_1\varphi_1'(x)+\alpha_2\varphi_2'(x)+\ldots+\alpha_n\varphi_n'(x)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1\varphi_1^{(n-1)}(x)+\alpha_2\varphi_2^{(n-1)}(x)+\ldots+\alpha_n\varphi_n^{(n-1)}(x)=0 \end{cases}$$

are soluția nenulă $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ oricare ar fi $x\in I$ şi, în consecință, determinantul său este nul, adică

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)(x)=0, \forall\ x\in I\,.$$

Prezentăm, fără demonstrație:

Propoziția 5.1.2. (Teorema de existență şi unicitate) *Ecuația diferențială (2.1.2) admite pentru fiecare* $(y_0^0, y_0^1, y_0^2, \ldots, y_0^{n-1})\in R^n$ *o soluție unică* $\varphi\in\varphi^n(I)$ *cu proprietățile:*

$$(5.1.3.)\quad \begin{cases} \varphi(x_0)=y_0^0 \\ \varphi'(x_0)=y_0^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1} \end{cases}$$

unde $t_0\in I$ *este un punct fixat.*

În particular, teorema de existență şi unicitate este adevărată şi pentru ecuația omogenă ($f=0$).

În continuare vom nota prin S mulțimea tuturor soluțiilor ecuației omogene şi prin S_f mulțimea soluțiilor ecuației neomogene pentru $f\neq 0$, funcție fixată.

Propoziția (5.1.3) *S este un spațiu liniar real de dimensiune n.*

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Dacă $\varphi_1, \varphi_2 \in S$ şi $\alpha, \beta \in R$ atunci

$$L(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha L(\varphi_1) + \beta L(\varphi_2) = 0$$

de unde rezultă că $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \in S$ şi astfel S este spațiu liniar real.

Dacă fixăm $x_0 \in I$, din teorema de existență şi unicitate rezultă că pentru orice punct $(y_0^0, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1}) \in R^n$ există o singură soluție $\varphi \in S$ care satisface (2.1.3).

Deoarece, din

$$\begin{cases} \varphi^{(k)}(x_0) = y_0^k \\ \psi^k(x_0) = z_0^k \end{cases} \quad k = 1,2,\ldots,n$$

rezultă

$$(\alpha\varphi + \beta\psi)^{(k)}(x_0) = \alpha y_0^k + \beta z_0^k$$

Deducem că operatorul $T : R^n \to S$ definit prin:

$$T(y_0^0, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1}) = \varphi$$

unde φ este unica soluție din S cu proprietățile (2.1.3), este liniar şi bijectiv astfel că $\dim S = \dim R^n = n$.

Consecință. Există în S, n soluții $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ liniar independente.

Definiția 5.1.2. *Numim sistem fundamental de soluții pentru ecuația diferențială liniară omogenă de ordinul n, orice sistem format din n soluții liniar independente ale ecuației.*

Remarcăm că orice sistem fundamental de soluții $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ din S este o bază a spațiului n-dimensional S şi, în consecință, pentru orice $\varphi \in S$ există $c_1, c_2, \ldots, c_n \in R$ astfel încât

Scanned with OKEN Scanner

$$\varphi(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x),\ \forall x\in S.$$

Propoziția 5.1.4. *Funcțiile* $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\in S$ *constituie un sistem fundamental de soluții dacă și numai dacă*

$$W(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)(x)\neq 0,\ \forall x\in I.$$

Demonstrație.

Presupunem că $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\in S$ este un sistem fundamental de soluții și (prin reducere la absurd) să admitem că există $x_0\in I$ pentru care

$$W(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)(x_0)=\begin{vmatrix}\varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_0)\\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0) & \ldots & \varphi_n'(x_0)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0) & \varphi_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x_0)\end{vmatrix}=0$$

Atunci sistemul algebric

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i^{(k)}(x_0)=0,\quad k=0,1,2,\ldots,n-1$$

are determinantul nul și de aceea admite soluții nenule.

Fie $\alpha_i=\alpha_i^0,\ i=1,2,\ldots,n$ o astfel de soluție.

Deoarece funcția φ definită pe I prin:

$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(x),\ \forall\ x\in I$ este soluție a ecuației omogene (aparține spațiului S) și are proprietățile $\varphi^{(k)}(x_0)=0,\forall$ k=0,1,2,...n-1, pe baza teoremei de existență și unicitate deducem că $\varphi(x)=0,\ \forall\ x\in I$ (soluția nulă este unica soluție cu proprietățile precedente).

Rezultă de aici că $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ sunt liniar dependente, fapt ce contrazice ipoteza.

Scanned with OKEN Scanner

Reciproc, să admitem acum că pentru $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n \in S$ are loc

$$W(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)(x)\neq 0 \ \forall \ x\in I$$

Dacă $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ ar fi liniar dependente atunci pe baza Propoziției 2.1.1 rezultă că $W(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)=0$. Contradicția obținută arată că $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ nu pot fi liniar dependente şi în concluzie, reprezintă un sistem fundamental de soluții.

Consecință. Fie $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n \in S$. Dacă există $x_0 \in I$ cu proprietatea $W(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)(x_0)=0$ atunci $W(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)(x)=0$, $\forall \ x\in I$.

Demonstrație. Într-adevăr, pe baza propoziției precedente, dacă există $x_0 \in I$ astfel ca

$$W(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)(x_0)=0$$

Atunci funcțiile $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ sunt liniar dependente, iar în virtutea Propoziției 2.1.1, $W(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)(x)=0, \ \forall \ x\in I$.

Propoziția 5.1.5. *Fie* $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n \in S$ *şi* $W(x)=W(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)(x)$.
atunci

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(s)ds}, \ \forall x,x_0\in I.$$

Demonstrație.
Ştim că $W\in\varphi'(I)$ şi derivând egalitatea:

$$W(x)=\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \varphi_1^{(n-2)}(x) & \varphi_2^{(n-2)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-2)}(x) \end{vmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Obținem (derivând fiecare linie a determinantului W şi observând că prin derivarea primelor n-1 linii se obțin determinanți cu două linii egale):

$$W'(x)=\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \varphi_2^{(n)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

Înlocuind (în virtutea ecuației omogene):

$$\varphi_i^{(n)}(x)=-a_1(x)\varphi_i^{(n-1)}(x)-a_2(x)\varphi_i^{(n-2)}(x)-\dots-a_n(x)\varphi_i(x),\quad i=1,2,\dots,n$$

rezultă că $W'(x)$ este o sumă de n determinanți dintre care *n-1* sunt nuli (având două linii proporționale) de aceea

$$W'(x)=-a_1(x)W(x).$$

Rezultă de aici că W este soluție a ecuației liniare (omogene) de ordinul I:

$$y'=-a_1(x)y$$

şi prin urmare

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}a_1(s)ds},\quad \forall\ x_0,x\in I$$

Fie $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n\in S$ un sistem fundamental de soluții pentru ecuația diferențială liniară omogenă de ordinul n.

Din cele prezentate în acest paragraf deducem că pentru orice altă soluție φ a ecuației omogene există constantele $c_1,c_2,\dots,c_n\in R$ astfel ca

(5.1.4) $\varphi(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\dots+c_n\varphi_n(x),\ \forall\ x\in I$.

Deoarece oricare funcție de forma (5.1.4) cu $c_1,c_2,\dots,c_n\in R$ este (în virtutea liniarității operatorului T) soluție

Scanned with OKEN Scanner

a ecuației diferențiale omogene, deducem că (5.1.4) furnizează, prin particularizarea constantelor $c_1, c_2, \ldots, c_n$, toate soluțiile ecuației omogene considerate.

Din acest motiv vom numi (5.1.4) soluția generală a ecuației diferențiale liniare de ordinul n.

Încheiem acest paragraf cu o metodă de reducere a ordinului unei ecuații diferențiale liniare omogene de ordinul n, când cunoaştem o soluție particulară a sa.

Fie deci ecuația diferențială

(2.1.5) $$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y = 0$$

pentru care cunoaştem soluția φ.

Efectuăm schimbarea de funcție

$$y = \varphi a$$

şi prin derivare obținem:

$$y' = \varphi' u + \varphi u'$$

$$y'' = \varphi'' u + 2\varphi' u' + \varphi u''$$

.....

$$y^{(n)} = \varphi^{(n)} u + C_n^1 \varphi^{(n-1)} u' + \ldots + C_n^k \varphi^{(n-k)} u^{(k)} + \ldots + \varphi u^{(n)}$$

Înlocuind în ecuația (2.1.5) va rezulta:

$$\varphi(x)u^{(n)} + [n\varphi'(x) + a_1(x)\varphi(x)]u^{(n-1)} + \ldots + [c_k^n \varphi^{(n-k)}(x) + c_{n-1}^k a_1(x)\varphi^{(n-1-k)}(x) + \ldots + c_k^k a_{n-k}(x)\varphi(x)]u^{(k)} +$$
$$+ \ldots +$$
$$[c_n^1 \varphi^{(n-1)}(x) + c_{k+1}^1 a_1(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{k-1}(x)\varphi(x)]u' + [\varphi^n(x) + a_1(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}(x)\varphi'(x) + a_n(x)\varphi(x)]u$$

Deoarece coeficientul lui u, în ultimul termen, este unu (în virtutea faptului ca φ este soluție) putem alege $z = u'$ ca funcție necunoscută şi reducem ordinul ecuației cu o unitate.

Scanned with OKEN Scanner

5.2. Rezolvarea ecuației neomogene. Metoda variației de constantă

Considerăm ecuația diferențială liniară neomogenă de ordinul n

(5.2.1) $$y^{(n)}a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

şi ecuația omogenă corespunzătoare

(5.2.2) $$y^{(n)}a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

Presupunem pentru ecuația (5.2.2) cunoaştem un sistem fundamental de soluții $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ şi cîn consecință soluția generală a acestei ecuații poate fi scrisă sub forma:

(5.2.3) $$\tilde{\varphi}(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)$$

Dacă se cunoaşte o soluție φ_0 pe I=(a,b), a ecuației neomogen 5.2.1, atunci $\tilde{\varphi}+\varphi_0$ este soluție a ecuației (5.2.1) oricare ar fi constantele $c_1,c_2,\ldots,c_n\in\mathbf{R}$.

Întradevăr,

$$\mathbf{L}\left(\tilde{\phi}+\varphi_0\right)=L(\tilde{\phi})+L(\varphi_0)=L(\varphi_0)=f$$

Reciproc, dacă φ este soluție arbitrară a ecuației (5.2.1) atunci $\mathbf{L}\left(\tilde{\phi}+\varphi_0\right)=L(\tilde{\phi})+L(\varphi_0)=f-f=0$,

deci $\varphi-\varphi_0$ este soluție a ecuație (5.2.2). Rezultă că există constantele $c_1,c_2,\ldots,c_n\in\mathbf{R}$ astfel încât $\varphi=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\ldots+c_n\varphi_n+\varphi_0$

Din cele de mai sus deducem că toate soluțiile ecuației (5.2.1) sunt furnizate de formula

(5.2.4) $$\varphi=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\ldots+c_n\varphi_n,\forall x\in I=(a,b)$$

Scanned with OKEN Scanner

prin particularizarea constantelor $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbf{R}$ m unde $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ este un sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă (5.2.2), iar φ_0 este o soluție particulară fixată a ecuației neomogene (5.2.1).

Vom numi (5.2.4) soluția generală a ecuației diferențiale liniare de ordinul n.

În continuare, vom presupune că am rezolvat ecuația diferențială omogenă (5.2.2), deci cunoaştem un sistem fundamental de soluții $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ pentru această ecuație. Pentru rezolvarea ecuației neomogene (5.2.1) trebuie să determinăm o soluție particulară φ_0 a ecuației (5.2.1) şi în acest scop vom utiliza metoda variației constantelor.

În formula (5.2.3) care reprezintă soluția generală a ecuației omogene vom înlocui constantele $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbf{R}$ prin funcția de clasă $\varphi'(I)$ şi vom căuta soluții de forma :

(5.2.5) $$\varphi_0 = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + ... + c_n\varphi_n, \forall x \in I$$

În continuare, vom încerca să determinăm funcțiile $c_i, i = 1,2,..,n$ astfel încât φ_0 să fie soluție a ecuației neomogene (5.2.1).

Prin derivarea funcției φ_0 obținem :

$$\varphi_0' = c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 + ... + c_n'\varphi_n + c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2' + ... + c_n\varphi_n'$$

Impunând condiția :

$$c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 + ... + c_n'\varphi_n = 0$$

va rezulta

$$\varphi_0' = c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2' + ... + c_n\varphi_n'$$

Analog, derivata de ordin doi va fi:

$$\varphi_0'' = c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' + ... + c_n'\varphi_n' + c_1\varphi_1'' + c_2\varphi_2'' + ... + c_n\varphi_n''$$

şi impunând condiția

$$c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' + ... + c_n'\varphi_n' = 0$$

obținem

$$\varphi_0'' = c_1\varphi_1'' + c_2\varphi_2'' + ... + c_n\varphi_n''$$

Scanned with OKEN Scanner

Continuând în acest mod vom obține relațiile:

(5.2.6) $\varphi_0^{(k)} = c_1\varphi_1^{(k)} + c_2\varphi_2^{(k)} + ... + c_n\varphi_n^{(k)}$, k=1,2,..,n-1

cu condițiile

(5.2.7) $c_1'\varphi_1^{(k)} + c_2'\varphi_2^{(k)} + ... + c_n'\varphi_n^{(k)} = 0$, k=1,2,...,n-1

Utilizând (2.2.6) pentru k=n-1 deducem :

$$\varphi_0^{(n)} = c_1'\varphi_1^{(n-1)} + c_2'\varphi_2^{(n-1)} + ... + c_n'\varphi_n^{(n-1)} + c_1\varphi_1^{(n)} + c_2\varphi_2^{(n)} + ... + c_n\varphi_n^{(n)}$$

Dacă înlocuim (5.2.6) şi (5.2.8) în ecuația neomogenă (5.2.1) obținem

(5.2.9) $c_1'\varphi_1^{(n-1)} + c_2'\varphi_2^{(n-1)} + ... + c_n'\varphi_n^{(n-1)} = f$

Pentru determinarea funcțiilor $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbf{R}$ avem la dispoziție condițiile (5.2.7) şi relația (5.2.9) care conduc la sistemul:

$$\begin{cases} c_1'(x)\varphi_1(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) + ... + c_n'(x)\varphi_n(x) = 0 \\ c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x) + ... + c_n'(x)\varphi_n'(x) = 0 \\ \quad ..... \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)\varphi_2^{(n-1)}(x) + ... + c_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = 0 \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n)}(x) + c_2'(x)\varphi_2^{(n)}(x) + ... + c_n'(x)\varphi_n^{(n)}(x) = f(x) \end{cases}$$

Deoarece deteerminantul acestui sistem liniar este $W(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) \neq 0$ deducem că pentru a determina o unică soluție $c_1'(x), c_2'(x), ..., c_n'(x)$ a acestui sistem care prin integrare, ne duce la funcțiile $c_1(t), c_2(t), ..., c_n(t)$ şi, în ultima instanță, la soluția particulară a ecuației neomogene.

5.3. Ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți

În acest paragraf vom considera ecuația diferențială :

(5.3.1) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = f(x)$

Scanned with OKEN Scanner

unde $f: I=(a,b) \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă dată, iar coeficienţii $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt numere (constante) reale.

De asemenea, vom considera şi ecuaţia omogenă corespunzătoare:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (5.3.2)$$

Este clar că toate raţionamentele şi afirmaţiile făcute în primele două paragrafe ale acestui capitol rămân valabile în cazul particular al ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi.

Din acest motiv, rezolvarea ecuaţiei (5.3.2) se reduce la găsirea unui sisrtem fundamental de soluţii, care va duce la determinarea tuturor soluţiilor (soluţiei generale) pentru ecuaţia (5.3.2).

Soluţia generală a ecuaţiei (5.3.1) se va obţine din soluţia generală a ecuaţiei (5.3.2) prin completarea cu o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (5.3.1)

În acest paragraf ne propunem să indicăm o metodă pentru determinarea unui sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei (5.3.2) în cazul coeficienţilor constanţi. De asemenea vom indica un procedeu de găsire a unei soluţii φ_0 pentru ecuaţia neomogenă (5.3.1) în cazul în care funcţia $\varphi(x)=e^{rx}$, doarece $\varphi^{(k)}(x)=r^k e^{rx}$ prin înlocuire în (5.3.2), obţinem:

$$e^{rx}\left(r^k + a_1 r^{n-1} + ... + a_{n-1} r + a_n\right) = 0$$

de unde rezultă că funcţia $\varphi(x)=e^{rx}$ este soluţie a ecuaţiei (2.3.2) dacă şi numai dacă r este soluţie a ecuaţiei algebrice:

$$r^n + a_1 r^{n-1} + ... + a_{n-1} r + a_n = 0 \quad (5.3.3)$$

numită ecuaţia caracteristică a ecuaţiei diferenţiale (2.3.2)

Să observăm că ecuaţia (5.3.2) poate fi obţinută direct din (5.3.2) prin înlocuirea derivatei $y^{(k)}$ prin r^k si în particular , $y = y^0$ prin $y^0 = 1$.

1) Să presupunem că ecuaţia (5.3.3) admite n rădăcini reale şi distincte $r_1, r_2, ..., r_n$. Din cele de mai sus rezultă că funcţiile

Scanned with OKEN Scanner

$\varphi_i(x)=e^{r_i x}, i=1,2,...,n$ sunt soluții ale ecuației diferențiale omogene (5.3.2) şi deoarece

$$W(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n)(x)=\begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} & ... & e^{r_nx} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x} & ... & r_ne^{r_nx} \\ ... & ... & ... & ... \\ r_1^{(n-1)}e^{r_1x} & r_2^{(n-1)}e^{r_2x} & ... & r_n^{(n-1)}e^{r_nx} \end{vmatrix}=e^{(r_1+r_2+...+r_n)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ r_1 & r_2 & ... & r_n \\ ... & ... & ... & ... \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & ... & r_n^{n-1} \end{vmatrix}=$$

$$=e^{(r_1+r_2+...+r_n)}\prod_{i<j}(r_j=r_i)\neq 0$$

deducem că soluțiile $\varphi_1(x)=e^{r_1x},\varphi_2(x)=e^{r_2x},...,\varphi_n(x)=e^{r_nx}$ constituie un sistem fundamental de soluții pentru ecuația diferențială omogenă considerată. Astfel soluția generată a acestei ecuații va fi dată prin formula:

$$\varphi(x)=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}+...+c_ne^{r_nx}, c_1,c_2,...,c_n\in\mathbf{R}$$

2) Să presupunem că ecuația caracteristică are rădăcinile reale, unele din acestea putând fi multiple.

Pentru început să admitem că r=0 este rădăcină multiplă de ordinul k, deci ecuația caracteristică are forma:

$$r^n+a_1r^{n-1}+...+a_{n-k}r^{n-k}=0$$

Deducem că ecuația (2.3.2) are forma

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-k}y^{n-k}=f(x)$$

şi, prin urmare funcțiile $\varphi_1(x)=1,\varphi_2(x)=x,...,\varphi_n(x)=x^{k-1}$ fiind polinoame de grad mai mic sau egal cu k-1, vor fi soluții (evident liniare) ale ecuației (5.3.2).

Să admitem acum că $r_0\neq 0$ este rădăcină multiplă de ordinul k a ecuației diferențiale (5.3.2), prin urmare , funcția $\varphi_0(x)=e^{r_0x}$ este soluție a ecuației diferențiale (5.3.2).

Cu schimbarea de funcție $y=f(x)\Leftrightarrow u=e^{r_0x}u$ obținem, pentru funcția u, ecuația diferențială liniară:

$$\varphi_0(x)u^{(n)}+b_1(x)u^{(n-1)}(x)+...+b_{n-k}(x)u^{(k)}+...+b_{n-1}(x)u'+b_n=0$$

unde conform formulei (5.1.6) din primul paragraf

$$\mathbf{b}_{n-k}(x)=c_n^k\varphi_0^{(n=k)}(x)+c_{n-1}^k\varphi_0^{(n=k-1)}(x)+...+c_k^k\varphi_0^{(k)}(x)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă avem în vedere că $\varphi_0(x)=e^{r_0x}$, obţinem :

$$\frac{1}{k!}n(n-1)...(n-k-1)r_0^{n-k}+a_1(n-1)(n-2)...(n-k)r_0^{n-k-1}+...+k!a_{n-k}e^{r_0x}=\frac{p^{(k)}(r_0)}{k!}e^{r_0x}$$

unde p(z) este polinomul caracteristic dat de ecuaţia $p(z)=z^n+a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_n$
iar $p^{(k)}(z)$ este derivata sa de ordinul k.

Rezultă de aici că funcţia u verifică ecuaţia diferenţială (obţinută după simplificarea cu e^{r_0x}) :

$$u^{(n)}+\frac{p^{(n-1)}(r_0)}{(n-1)!}u^{(n-1)}+...+\frac{p^{(k)}(r_0)}{k!}u^{(k)}+...+\frac{p'(r_0)}{1!}u'+p(r_0)u=0$$

Am admis că r_0 este rădăcină multiplă de ordinul k pentru ecuaţia caracteristică p(z)=0 şi în consecinţă:

$$p(r_0)=p'(r_0)=...=p^{(k-1)}(r_0)=0 \qquad p^{(k)}(r_0)\neq 0$$

De aceea, noua ecuaţie în u are forma:

$$u^{(n)}+\frac{p^{(n-1)}(r_0)}{(n-1)!}u^{(n-1)}+...+\frac{p^{(k)}(r_0)}{k!}u^{(k)}=0$$

Şi conform celor stabilite la punctul 1) deducem că are soluţiile liniar independente $\phi_1(x)=1,\phi_2(x)=x,...,\phi_k(x)=x^{k-1}$

Având în vedere schimbarea de funcţii efectuată , rezultă că funcţiile $\varphi_1(x)=e^{r_1x},\varphi_2(x)=e^{r_2x},...,\varphi_n(x)=e^{r_nx}$ sunt soluţii (liniar independente) ale ecuaţiilor omogene (2.3.2)

Să presupunem acum că ecuaţia p(z)=0 are soluţiile reale cu diferite ordine de multiplicitate şi anume:

r_1 multiplă de ordinul k_1

r_2 multiplă de ordinul k_2

– – – – – – –

r_m multiplă de ordinul k_m

unde $k_1+k_2+...+k_m$ =n (k_j corespunde cazului când r_j este soluţie simplă)

Scanned with OKEN Scanner

Din cele demonstrate mai sus, funcţiile:

$$e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, \ldots, x^{k_1-1}e^{r_1 x}$$
$$e^{r_2 x}, xe^{r_2 x}, \ldots, x^{k_2-1}e^{r_2 x}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e^{r_m x}, xe^{r_m x}, \ldots, x^{k_m-1}e^{r_m x}$$

sunt soluţii ale ecuaţiei omogene (5.3.2).

Se poate demonstra că cele n soluţii de mai sus sunt liniar independente şi de aceea reprezintă un sistem fundamental de soluţii.

În acest scop soluţia generală a ecuaţiei (5.3.2) este dată de (5.3.5)

$$\varphi(x) = \left(c_1 + c_2 x + \ldots + c_{k_1} c^{k_1-1}\right)e^{r_1 x} + \ldots + \left(c_{n-k_m+1} + c_{n-k_m+2}x + \ldots + c_n x^{k_m-1}\right)e^{r_m x}$$

3) În final vom presupune că ecuaţia caracteristică (2.3.3) are şi rădăcini complexe (simple sau multiple).

Pentru acest caz să facem mai întâi observaţia că dacă o funcţie complexă:

$$\varphi(x) = u(x) + iv(x) \qquad \text{u,v funcţii reale}$$

este soluţie a ecuaţiei omogene (5.3.2) atunci:

$0 = L(\varphi) = L(u) + iL(v)$ şi în acest caz L(u)=L(v)=0 deci partea reală u şi partea imaginară v sunt de asemenea soluţii ale ecuaţiei (5.3.2).

În concluzie, dacă $r = \alpha + i\beta$ este o solutie multiplă de ordinul k a ecuaţiei caracteristice (2.3.3) atunci $r = \alpha - i\beta$ este de asemenea soluţie multiplă de ordinul k a acestei ecuaţii.

$$x^j e^{(\alpha \pm i\beta)x} = x^j e^{jx}\left(\cos \beta x \pm i \sin \beta x\right) \text{ , j=0,1,2,...,k-1}$$

sunt soluţii (complexe) ale ecuaţiei omogene (5.3.2). Luând partea reală şi cea imaginară obţinem 2k soluţii reale ale ecuaţiei (5.3.2)

$x^j e^{jx} \cos \beta x, x^j e^{jx} \sin \beta x$, j=0,1,2,...,k-1

Sintetizând rezultatele obţinute mai sus, să presupunem că ecuaţia caracteristică (5.3.3) are rădăcinile reale

Scanned with OKEN Scanner

r_1 multiplu de ordinul k_1
r_2 multiplu de ordinul k_2

---

r_j multipu de ordinul k_j

şi rădăcinile complexe.
$\alpha_1 \pm i\beta_1$ multiple de ordinul m_1

$\alpha_p \pm i\beta_p$ multiple de ordinul m_p
unde $k_1 + ... + k_j + 2(m_1 + ... + m_p) = n$

Atunci următoarele n funcţii:

$$e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, ..., x^{k_1 - 1} e^{r_1 x}$$

$$e^{r_j x}, xe^{r_j x}, ..., x^{k_j - 1} e^{r_j x}$$
$$e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, xe^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, ..., x^{m_1 - 1} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x$$
$$e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, xe^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, ..., x^{m_1 - 1} e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x$$

$$e^{\alpha_p x} \cos \beta_p x, xe^{\alpha_p x} \cos \beta_p x, ..., x^{m_p - 1} e^{\alpha_p x} \cos \beta_p x$$
$$e^{\alpha_p x} \sin \beta_p x, xe^{\alpha_p x} \sin \beta_p x, ..., x^{m_p - 1} e^{\alpha_p x} \sin \beta_p x$$

sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale omogene (5.3.2)

Se poate demonstra că soluţiile de mai sus sunt liniar independente, deci reprezintă un sistem fundamental de soluţii, iar soluţia generată a ecuaţiei (5.3.2) poate fi scrisă
(5.3.6)

$$\varphi(x) = P_1 e^{r_1 x} + ... + P_j(x) e^{r_j x} + Q_1(x) e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x + R_1(x) e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x + ... +$$
$$+ Q_p(x) e^{\alpha_p x} \cos \beta_p x + R_p(x) e^{\alpha_p x} \sin \beta_p x$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $P_1,...,P_j,Q_1,...,Q_p,R_1,...,R_p$ sunt polinoame cu coeficienți $c_1,c_2,...,c_n \in \mathbf{R}$ şi având gradele după cum urmează:

$$gradP_1 = k_1 - 1,...,gradP_j = k_j - 1$$
$$gradQ_1 = gradR_1 = m_1 - 1$$
$$.....$$
$$gradQ_p = gradR_p = m_p - 1$$

Orice soluție a ecuației diferențiale (5.3.2) se obține din soluția generală (5.3.6), dată mai sus, prin particularizarea coeficienților polinoamelor $P_1,...,P_j,Q_1,...,Q_p,R_1,...,R_p$.

Pentru rezolvarea ecuației diferențiale liniare neomogene (5.3.1) avem nevoie de o soluție particulară φ_0 a acesteia

După cum am văzut în al doilea paragraf , determinarea unei astfel de soluții φ_0 se poate face prin metoda variației constantelor.

Să presupunem că funcția f, din membrul drept al ecuației (5.3.1) are următoarea formă particulară:

(5.3.7) $$f(x) = P_0(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_0(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

unde P_0 şi Q_0 sunt polinoame cu coeficienți reali iar α,β numere reale.

În acest caz se poate căuta o soluție particulară a ecuației (5.3.1) de forma:

(5.3.8) $$\varphi_0(x) = x^k[P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x]$$

unde P şi Q sunt polinoame cu coeficienți nedeterminați cu $gradP = gradQ = \max(gradP_0, gradQ_0)$, iar k esre ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\alpha + i\beta$ pentru ecuația caracteristică (5.3.3).

Dacă $\alpha + i\beta$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice atunci în soluției particulare (5.3.8) se ia k=0 şi factorul x^k dispare.

Coeficienții polinoamelor P şi Q pot fi determinați (în mod unic) dacă impune, condiția ca φ_0 să fie soluție a ecuației (5.3.1).

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în ecuația diferențială (5.3.1) şi identificând apoi coeficienții, vom obține un sistem liniar, având necunoscutele coeficienții polinoamelor P şi Q.

5.4. Ecuații diferențiale reductibile la ecuații liniare de ordin superior cu coeficienți constanți

5.4.1 Ecuația lui Euler.

Ecuația diferențială liniară de ordinul n

(5.4.1) $$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} xy' + a_n y = f(x)$$

unde $a_1, a_2, .., a_n$ sunt constante reale se numeşte ecuația diferențială liniară de tip Euler.

Se vede imediat că ecuația (5.4.1) este oecuație diferențială omogenă în x deci pentru t>0 (t<0) putem efectua schimbarea de variabile $x = e^s$ ($x = e^{-s}$) obținând $y(x) = y(e^s) = k(s)$

Din cele precizate în capitolul precedent,

$$x^k y^{(k)} = u^{(k)} + \alpha_1 u^{(k-1)} + ... + \alpha_{k-1} u'$$

şi înlocuind în ecuația (2.4.1) se obține o ecuație liniară cu coeficienți constanți (în funcție de necunoscuta u):

(5.4.2) $$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + ... + b_{n-1} u' + b_n u = F(s)$$

unde

$$F(s) = f(e^s)$$

După rezolvarea ecuației (5.4.2), prin metodele descrise în paragraful precedent, obținem soluția sa generală sub forma:

(5.4.3) $y(s) = c_1\varphi_1(s) + c_2\varphi_2(s) + ... + c_n\varphi(s) + \varphi_0(s)$ $\quad c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbf{R}$

unde $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ este un sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă corespunzătoare ecuației (5.4.2), iar φ_0 este o soluție particulară a ecuației (5.4.2).

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea soluției generale a ecuației lui Euler înlocuim $s=\ln|x|$, deci:

$$y(x)=u(\ln|x|)=c_1\varphi_1(\ln|x|)+c_2\varphi_2(\ln|x|)+...+c_n\varphi(\ln|x|)+\varphi_0(\ln|x|)$$

Să reamintim că la rezolvarea unei ecuații liniare omogene de ordinul n cu coeficienți constanți s-a determinat un sistem fundamental de soluții, căutând soluții de forma $\phi(x)=e^{rx}$, fiind conduşi astfel la ecuația caracteristică asociată.

Dacă utilizăm metoda pentru ecuația diferențială omogenă corespunzătoare ecuației (5.4.2) (F=0) , va trebui să căutăm soluții de forma $\varphi(s)=e^{rs}$, înseamna că ecuația Euler omogenă (f=0) va avea soluția de forma $\phi(x)=\varphi(\ln|x|)=x^r$

Dacă înlocuim în ecuația omogenă corespunzătoare ecauției (5.4.1) $\phi(x)=x^r$, deducem că ϕ este soluție, dacă şi numai dacă :

$$x^n r(r-1)...(r-n+1)x^{r-n}+a_1x^{n-1}r(r-1)...(r-n+2)e^{r-n+1}+...+a_{n-1}xrx^{r-1}+a_nx^r=0$$

sau, după simplificare cu x^r :

(5.4.4) $$r(r-1)...(r-n+1)+a_1r(r-1)...(r-n+2)+...+a_{n-1}r+a_n=0$$

Ecuația algebrică (5.4.4) se poartă numele de ecuația caracteristică pentru ecuația Euler omogenă.

Din cele precizate în paragraful precedent, dacă ecuația caracteristică (5.4.4) are rădăcinile:

r_1 multiplă de ordinul k_1

r_2 multiplă de ordinul k_2

---

r_j multiplă de ordinul k_j

$\alpha_1\pm i\beta_1$ rădăcină complexă multiplă de ordinul m_1

$\alpha_p\pm i\beta_p$ rădăcină complexă multiplă de ordinul m_p

cu

$$k_1+...+k_j+2(m_1+...+m_p)=n,$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci un sistem fundamental de soluții pentru ecuația Euler omogenă este dat de funcțiile :

$x^{r_1}, (\ln|x|)x^{r_1}, ..., (\ln|x|)^{k_i-1}x^{r_1},$

– – – – – – – – – – – – – –

$x^{r_j}, (\ln|x|)x^{r_j}, ..., (\ln|x|)^{k_j-1}x^{r_j},$

– – – – – – – – – – – – – –

$x^{\alpha_1}\cos(\beta_1 \ln|x|), (\ln|x|)x^{\alpha_1}\cos(\beta_1 \ln|x|), ..., (\ln|x|)^{m_1-1}x^{\alpha_1}\cos(\beta_1 \ln|x|)$

$x^{\alpha_1}\sin(\beta_1 \ln|x|), (\ln|x|)x^{\alpha_1}\sin(\beta_1 \ln|x|), ..., (\ln|x|)^{m_1-1}x^{\alpha_1}\sin(\beta_1 \ln|x|)$

– –

$x^{\alpha_p}\cos(\beta_p \ln|x|), (\ln|x|)x^{\alpha_p}\cos(\beta_p \ln|x|), ..., (\ln|x|)^{m_p-1}x^{\alpha_{1p}}\cos(\beta_p \ln|x|)$

$x^{\alpha_p}\sin(\beta_p \ln|x|), (\ln|x|)x^{\alpha_p}\sin(\beta_p \ln|x|), ..., (\ln|x|)^{m_p-1}x^{\alpha_{1p}}\sin(\beta_p \ln|x|)$

Pentru determinarea unei soluții particulare φ_0 a ecuației (5.4.1) se poate utiliza metoda variației constantei sau metoda coeficienților nedeterminați (dacă funcția f este de forma particulară).

Soluția generală a ecuației Euler neomogene (5.4.1) poate fi scrisă sub forma:

(5.4.5)

$$y(x) = P_1(\ln|x|)x^{r_1} + ... + P_j(\ln|x|)x^{r_j} + Q_1(\ln|x|)x^{\alpha_1}\cos(\beta_1 \ln|x|) + R_1(\ln|x|)x^{\alpha_1}\sin(\beta_1 \ln|x|) + ... +$$
$$+ Q_p(\ln|x|)x^{\alpha_p}\cos(\beta_p \ln|x|) + R_p(\ln|x|)x^{\alpha_p}\sin(\beta_p \ln|x|) + \varphi_0(x)$$

unde P_i, Q_j, R_k $1 \le i \le j, 1 \le k \le p$ sunt polinoame în $\ln x$ cu coeficienți constante arbitrare $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbf{R}$ cu $gradP_i = k_i - 1$ i=1,2,...,j $gradQ_j = gradR_k = m_k - 1$ k=1,2,...,p

Scanned with OKEN Scanner

5.4.2. O generalizare a ecuațiilor Euler reprezintă ecuațiile diferențiale de ordinul n de forma:

(5.4.6) $(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x)$

pentru rezolvarea cărora se efectuează schimbarea de variabilă $ax+b=e^s$ (sau $ax+b=e^{-s}$)

Dacă notăm

(5.4.7) $$y(x) = y\left(\frac{e^s - b}{a}\right) = n(s)$$

atunci

$$y'(x) = \frac{d}{dx}y = \frac{du}{ds}\frac{ds}{dx} = ae^{-s}\frac{d}{ds}u$$

şi prin recurență se arată că

$$(ax+b)^k y^{(k)}(x) = a^n u^{(k)}(s) + b_1 u^{(k+1)}(s) + ... + b_{k-1}u'(s)$$

astfel încât după înlocuirea în ecuația (2.4.6) se obține o ecuație liniară cu coeficienți constanți cu funcția necunoscută u(s).

Soluțiile ecuației (5.4.6) se obțin din soluțiile ecuației în u cu ajutorul schimbării de variabile:

$$y(x) = u(\ln(ax+b)).$$

5.5. Aplicatii ale ecuațiilor diferențiale în modelarea dinamicii proceselor economice

Analizând dinamica proceselor economice, reiese existența unor ecuații care descriu dependența dintre nivelul activității, nivelul factorilor şi ritmul sau viteza de evoluție a proceselor cercetate.

Ritmul se defineşte ca raport dintre sporul nivelului rezultat la două momente succesive şi nivelul rezultat la momentul t al procesului economic studiat.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă un proces economic se desfăşoară cu ritmul constant r = 10% pe o perioadă de timp (0,T), atunci traiectoria de evoluție va fi

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = r$$

adică

$$\int \frac{dy}{y(t)} dt = r \int dt$$

$$\ln y(t) = rt + C$$

$$y(t) = e^{rt} \cdot y_0$$

unde y_0 este nivelul în anul de bază considerat.

O relație între ritm şi factorii care condiționează evoluția procesului cercetat dă ecuația diferențială de forma

$$y'(t) = f(y(t), u(t))$$

unde: y(t) este nivelul ce rezultă,
u(t) este factorul de care depinde evoluția procesului.

Astfel de ecuații diferențiale sunt liniare, de forma

$$y'(t) = ay(t) + bu(t)$$

unde a şi b sunt coeficienți constanți sau variabili în timp.

Traiectoria de evoluție a procesului este

$$y(t) = e^{-a(t-t_0)} y_0 + b \int_{t_0}^{t} e^{a(t-t_1)} u(t_1) dt_1 .$$

Dacă $\frac{u'(t)}{u(t)} = r$ deoarece factorii u(t) se obțin prin ritmuri cunoscute, rezultă expresia dinamicii unei variabile când se cunoaşte ritmul de creştere r, prin integrarea ecuației

$$u'(t) = r \cdot u(t)$$

adică

$$u(t) = e^{r \cdot t} \cdot u_0 .$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile diferențiale liniare sunt cel mai des întâlnite în analiza dinamicii proceselor economice, variabila independentă fiind timpul t.

5.6. Aplicații propuse

1. Să se integreze ecuațiile diferențiale cu variabile separabile :

a) $xy'-y=y^2$

b) $y'=1+y^2$

2. Să se integreze ecuațiile diferențiale omogene şi reductibile la omogene :

a) $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$

b) $(2x+3y-1)dx+(6x+9y+2)dy=0$

c) $y'=\dfrac{x-y}{x+y}$

3. Să se integreze ecuațiile diferențiale liniare, Bernoulli şi Ricatti :

a) $y'-\dfrac{y}{x}=x$

b) $y'+\dfrac{1}{x^2-1}y=1+x$

c) $y'=-xy^2+x^3y+2x$, $y_P=x^2$

d) $2x^2y'-4xy=y^2$

e) $y'-\dfrac{1}{3}y^2-\dfrac{2}{3x^2}=0$, $y_P=-\dfrac{1}{x}$

Scanned with OKEN Scanner

3. Dacă viteza de variație a unui proces este proporțională cu nivelul atins x(t), coeficientul de proporționalitate este a = 0,03. Aflați traiectoria procesului, știind că la momentul t = 0 nivelul inițial este $x_0 = 100$.

4. Un proces economic se desfăşoară cu ritmul constant de 6% pe o anumită perioadă. Să se determine traiectoria de evoluție, cunoscând nivelul de bază $y_0 = 500$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VI

ELEMENTE DE MATEMATICI FINANCIARE

6.1. Dobânda simplă

Noțiunea fundamentală cu care se operează în calculele financiare este noțiunea de **dobândă**. Cuvântul dobândă apare la sfârşitul Evului Mediu pentru a înlocui cuvântul camătă al cărui sens era acela de dobândă exorbitantă. Dobânda este remunerația cuvenită pentru folosirea unei sume de bani.

Definiția 6.1.1. *Numim* ***dobândă unitară****, dobânda dată de 1 unitate monetară (u.m.) pe timp de 1 an.* Se notează cu i.

În operațiile financiare, dobânda se calculează la 100 u.m. pe timp de 1 an. În acest caz ea se va numi **procent** şi se va nota cu p. Dobânda unitară este a suta parte din procent :

$$i = \frac{p}{100}.$$

Definiția 6.1.2. *Dobânda calculată asupra aceleiaşi sume de bani inițiale S_0 pe toată durata împrumutului se numeşte* ***dobândă simplă****.*

Dobânda simplă este proporțională cu suma depusă, durata impozitului şi procentul de dobândă.

Dacă notăm dobânda simplă cu D_s şi durata plasamentului cu t, atunci

$$D_s = S_0 \cdot i \cdot t = \frac{Spt}{100}.$$

Suma finală plasată pe o perioadă de t ani în regim de dobândă simplă va fi :

$$S_t \rightarrow S_t = S_0 + S_0 \cdot i \cdot t = S_0(1 + i \cdot t).$$

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Termenul $(1+i\cdot t)$ se numește **factor de fructificare** sau **de capitalizare**. Evident $S_0 = \frac{1}{1+it} S_t$, iar raportul $\frac{1}{1+it}$ se numește **factor de actualizare**.

Dacă considerăm unitatea de timp ziua, rezultă formula pentru dobânda simplă :

$$D_s = \frac{S_0 pt}{36000}.$$

Formula dobânzii simple conține 4 elemente, cunoscând trei dintre ele, se poate determina al patrulea.

Exemplul 1. Să se calculeze dobânda simplă produsă de 5000 u.m. pe timp de 2 ani cu un procent de 7%.
Soluție. $D_s = S_0 \cdot i \cdot t = 5000 \cdot 0{,}07 \cdot 2 = 700$ u.m.

Exemplul 2. Dacă o bancă oferă depunătorilor un procent anual p = 10% în regim de dobândă simplă şi o persoană depune o sumă inițială $S_0 = 30$ milioane lei pe timp de 1 an şi 3 luni, să se calculeze ce dobândă şi ce sumă finală îi revine la lichidarea depozitului.
Soluție. Dobânda simplă va fi

$$D_s = \frac{S_0 pt}{100} = 30\,000\,000 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}25 = 3\,750\,000 \text{ lei}$$

iar suma finală

$$S_t = S_0 + D_s = 33\,750\,000 \text{ lei}.$$

Exemplul 3. Să se calculeze dobânda produsă de 7000 u.m. cu un procent de 6% pe timp de 60 zile.

Soluție. $D_s = \frac{S_0 pt}{100} = \frac{7000 \cdot 6 \cdot 60}{36000} = 70$ u.m.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 4. Suma revenită după 3 ani este de 3 000 000 lei cu procentul p = 20 %. Care a fost suma inițială ?

Soluție. Suma inițială a fost :

$$S_0 = \frac{S_t}{1+it} = \frac{S_t}{1+\frac{p}{100}t} = \frac{3000000}{1+\frac{20\cdot 3}{100}} = 1875000 \text{ lei.}$$

Din punct de vedere practic, aplicarea formulei $D_s = \frac{S_0 pt}{36000}$ a dus la folosirea diverselor artificii în lipsa unui calculator. Unul dintre acestea este **metoda numerelor** : dacă vom nota cu $N=S_0t$ **numărul caracteristic** şi cu $d = \frac{36000}{p}$ **divizorul fix** rezultă :

$$D_s = \frac{N}{d}.$$

Să presupunem că o persoană a constituit de-a lungul timpului un număr de m depozite cu sumele inițiale $S_1, S_2, ..., S_m$. La un moment dat, se doreşte lichidarea depozitelor care au vechimea de $z_1, z_2, ..., z_m$ zile. Atunci $N_1 = S_1z_1$, $N_2 = S_2z_2$, ..., $N_m = S_mz_m$ iar dobânzile vor fi

$$D_1 = \frac{N_1}{d}, \; D_2 = \frac{N_2}{d}, \; ..., \; D_m = \frac{N_m}{d}.$$

Dobânda totală, în acest caz, va fi :

$$D = D_1 + D_2 + ... + D_m = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n} N_k .$$

Exemplul 5. Dacă se facturează următoarele operațiuni cu procentul anual de 10% :

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{pmatrix} S_0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 & 10000 & 30000 \\ 30 \text{ zile} & 70 \text{ zile} & 40 \text{ zile} \end{pmatrix},$$

să se calculeze dobânda totală.

Soluție. Divizorul fix este $d = \frac{36000}{p} = \frac{36000}{10} = 3600$ iar numerele caracteristice sunt :

$$N_1 = S_1 z_1 = 150\,000,$$
$$N_2 = S_2 z_2 = 700\,000,$$
$$N_3 = S_3 z_3 = 1\,200\,000.$$

Dobânda totală este :

$$D = \frac{1}{d}(N_1 + N_2 + N_3) = 569{,}444.$$

O altă metodă este **metoda părților alicote**. Părțile alicote ale unui număr sunt multiplii sau submultiplii acelui număr. Dacă $D_s = \frac{S_0 t}{d}$, unde t se exprimă în zile se observă că dacă suma S_0 este proporțională cu divizorul fix d, atunci dobânda va fi proporțională cu timpul, cu acelaşi factor de proporționalitate.

Putem enunța următoarea propoziție :

Propoziția 6.1.1. Dacă suma inițială S_0 este plasată pe durata t cu procentul p atunci există numerele întregi pozitive a şi $b_k \geq 2$, $k = \overline{1,n}$ astfel ca :

$$S_0 = \left(a + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} \right) d$$

iar dobânda aferentă este :

Scanned with OKEN Scanner

$$D_s = \left(a + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} \right) t$$

unde b_k sunt divizorii lui d sau multiplii acestor divizori.

Multiplii a·d şi submultiplii $\frac{1}{b_k} \cdot d$ ai divizorului fix d se numesc **părţi alicote** ale lui S_0.

Exemplul 6. Să se calculeze dobânda aferentă sumei $S_0 = 17\,220$ u.m. plasată cu un procent $p = 10\%$ pe o durată $t = 120$ zile.

Soluţie.

$d = 3600$

$$17220 = \left(4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} \right) \cdot 3600$$

$$D_s = \left(4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} \right) \cdot 120 = 574.$$

6.2. Dobânda compusă

În operaţia de dobândă compusă se consideră o anumită unitate de timp ca unitate etalon. Dobânda compusă se aplică în cazul operaţiilor financiare pe termen mai lung, astfel că unitatea de timp cel mai frecvent utilizată este anul.

Definiţia 6.2.1. *Spunem că o sumă de bani este plasată în regim de **dobândă compusă** când la sfârşitul primei perioade, dobânda simplă a acestei perioade se adaugă la sumă pentru a produce la rândul ei dobândă în perioada următoare.*

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 6.2.2. *Perioadele de timp în care dobânda se convertește în capital, producând la rândul ei dobândă se numesc* ***perioade de capitalizare*** *sau* ***perioade de fructificare.***

Astfel, pentru dobânda compusă se obține următoarea formulă de calcul :

Suma plasată la început o notăm cu S_0. După un an, aceasta devine $S_1 = S_0 + S_0 i = S_0(1 + i)$. După doi ani se obține $S_2 = S_1 + S_1 i = S_0(1 + i)^2$. Deci după t ani rezultă

$$S_t = S_0(1 + i)^t$$

unde S_t este suma finală obținută după perioada de t ani.

În acest caz, dobânda compusă D_c, produsă de suma inițială S_0 va fi

$$D_c = S_t - S_0 = S_0 [(1 + i)^t - 1].$$

Exemplul 7. Ce sumă finală şi ce dobândă se obține prin plasarea în regim de dobândă compusă a unei sume de 5000 u.m. pe timp de 3 ani cu procentul anual de 4% ?

Soluție. $S_t = S_0(1 + i)^t = 5000(1 + 0{,}04)^3 = 7000$ u.m.
$D_c = S_t - S_0 = 7000 - 5000 = 2000$ u.m.

Exemplul 8. Dacă de plasează suma de S_0 =100 000 u.m. pe durata de 4 ani în regim de dobândă compusă cu procentele anuale 5,6,7,10%, să se calculeze suma de care vom dispune după cei 4 ani, precum şi dobânda obținută.

Soluție.

Scanned with OKEN Scanner

S_t=100000(1+0,05)(1+0,06)(1+0,07)(1+0,1)=131000 u.m.

$D_c = S_t - S_0 = 31000$ u.m.

Dacă însă timpul de depunere nu este un număr întreg de perioade se procedează astfel : se foloseşte formula de calcul a sumei finale pentru partea întreagă şi se aplică dobânda simplă pentru partea fracţionară. Astfel : notăm $t = n + \frac{h}{k}$, iar după n ani suma finală va fi

$$S_n = S_0(1+i)^n .$$

Dobânda simplă produsă de S_n în timpul $\frac{k}{n}$ va fi

$$S_n \cdot i \cdot \frac{k}{n} = S_0(1+i)^n \cdot i \cdot \frac{k}{n}.$$

Deci

$$S_t = S_{n+\frac{k}{n}} = S_0(1+i)^n \cdot \left(1 + i \cdot \frac{k}{n}\right).$$

Exemplul 9. O persoană depune în fiecare an suma de 1000 u.m. cu dobândă compusă. Dacă se cunoaşte că dobânda anuală ese de 5%, să se afle numărul de depuneri efectuate dacă s-a obţinut un capital de 9549,10 u.m.

Soluţie. $(1+i)^n = S\ t/So + 1 \quad /lg$

$n\lg(1+i) = \lg(S\ t/So + 1)$

$n=8$

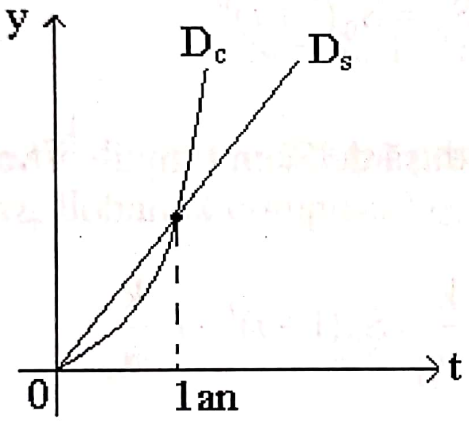
Scanned with OKEN Scanner

6.3. Plasament cu dobândă simplă sau compusă

Am văzut că $D_s = S_0 \cdot i \cdot t$

$$S_t = S_0(1 + i)^t - S_0.$$

Dacă D_s şi D_c sunt două funcţii continue pe $(0,\infty)$, graficele acestora în sistemul t0y vor fi :



Se observă că dacă :

a) $t \in (0,1\text{ an})$, atunci $D_c < D_s$

b) $t = 1$ an, atunci $D_c = D_s$

c) $t > 1$ an, atunci $D_c > D_s$.

Concluzionând, pentru durate mai mici de 1 an, dobânda simplă este mai mare decât cea compusă, deci plasamentul cu dobândă simplă este mai profitabil, în timp ce pentru durate mai mari de 1 an este mai mare dobânda compusă, deci plasamentul cu dobândă simplă nu mai este profitabil comparativ cu cel cu dobândă compusă.

Scanned with OKEN Scanner

6.4. Devalorizarea monedei

Suma finală şi dobânda obţinute ca urmare a plasării unui capital S_0 în regim de dobândă simplă sau compusă depind de S_0, de procentul de dobândă p şi de perioada depunerii t.

$$S_t = S_t(S_0, p, t)$$
$$D = D(S_0, p, t)$$

Dacă însă, din motive sociale, economice, politice, moneda se depreciază anual cu coeficient α, atunci :

a) dacă rata deprecierii este mai mică decât rata dobânzii (α<i), atunci valoarea finală a plasării unei unităţi monetare este supraunitară, deci se obţine un câştig, deoarece

$$1 \text{ u.m.} \xrightarrow{1 \text{ an}} \begin{cases} 1+i, & \text{fara devalorizare} \\ \dfrac{1+i}{1+\alpha}, & \text{cu devalorizare} \end{cases}$$

b) dacă rata devalorizării este mai mare decât rata dobânzii ($\alpha > 1$), atunci se face un plasament în pierdere.

Astfel, în cazul unei depuneri cu dobândă compusă, suma finală va fi :

$$S_t = \begin{cases} S_0(1+i)^t, & \text{fara devalorizare} \\ S_0\left(\dfrac{1+i}{1+\alpha}\right)^t, & \text{cu devalorizare} \end{cases} \tag{4.1.}$$

Dacă devalorizarea este controlată, atunci o unitate monetară plasată pe timp de 1 an cu un procent $p = 100\ i$ va fi

Scanned with OKEN Scanner

$$1\,\text{u.m.} \xrightarrow{1\ \text{an}} (1+i)(1+\alpha)$$

iar valoarea finală obținută va fi

$$S_t = S_0(1+i)^t(1+\alpha)^t \tag{4.2.}$$

Definiția 6.4.1. *Factorul* $1+\alpha$ *se numește* ***factor de devalorizare*** *după expresia* (E 5.4.1.) *și* ***factor de compensare a devalorizării*** *după expresia* (E 5.4.2.).

Notăm

$$1+j=(1+i)(1+\alpha)$$

cu

$$j=i+\alpha+i\alpha > \max(i,\alpha,i+\alpha,i\alpha)$$

unde j se va numi **dobânda anuală aparentă** iar i **dobânda anuală unitară reală**.

Pot exista și alți factori de risc în afara devalorizării, cum ar fi catastrofe naturale, războaie, etc, care influențează suma finală. De aceea se poate introduce un coeficient numit **coeficient de risc catastrofic** care face ca o unitate monetară, după un an să devină :

$$1\,\text{u.m.} \xrightarrow{1\ \text{an}} (1+i)(1+\alpha)(1+\beta)$$

deci suma inițială devine :

$$S_0 \xrightarrow{t\ \text{an}} S_0(1+i)^t(1+\alpha)^t(1+\beta)^t.$$

Notăm

Scanned with OKEN Scanner

$$(1+i)(1+\alpha)(1+\beta)=1+\ell,$$

unde ℓ este **dobânda anuală unitară aparentă**.

Exemplul 9. O bancă acordă împrumuturi cu un procent anual real de 20% şi dacă are loc o devalorizare anuală controlată de 5% şi se estimează un risc anual catastrofic de 10%, cu ce procent trebuie acordate creditele ?

Soluţie.

$$1+\ell=(1+i)(1+\alpha)(1+\beta)=1{,}38$$

$$\ell=0{,}38, \text{ iar } p=100\ell=38\%.$$

6.5. Plăţi eşalonate (rente)

În cazul operaţiunilor financiare, se întâlnesc cazuri când o sumă de bani se repartizează în aşa fel încât plata să se efectueze treptat, la date succesive, dinainte stabilite.

Definiţia 6.5.1. Plăţile eşalonate (rentele) sunt sumele de bani plătite la intervale de timp egale.

Intervalele de timp pot fi anul, semestrul, trimestrul, luna, iar plăţile eşalonate se vor numi respectiv anuităţi, sestrialităţi, trimestrialităţi, mensualităţi.

Dacă plăţile realizate la intervale de 1 an sunt egale, avem **unităţi constante**.

Plăţile eşalonate pot fi făcute la începutul perioadei, numindu-se **anticipate** sau la sfârşitul perioadei, numindu-se **posticipate**.

Scanned with OKEN Scanner

Plăți eşalonate anticipate

Suma T depusă în primul an, la începutul anului, devine la sfârşitul celor n ani Tu^n, cea depusă în al doilea an devine Tu^{n-1}, etc. Astfel,

$$S_n = Tu^n + Tu^{n-1} + \ldots + Tu = Tu\frac{u^n - 1}{u - 1} = Tu\frac{u^n - 1}{i}$$

adică

$$S_n = Ta_n,$$

unde $a_n = u\frac{u^n - 1}{i}$.

Plăți eşalonate posticipate

Suma T, depusă în primul an, la începutul anului, devine la sfârşitul celui de-al n-lea an : Tu^{n-1}, cea depusă în al doilea an devine Tu^{n-2}, etc. Astfel,

$$S_n = Tu^{n-1} + Tu^{n-1} + \ldots + Tu + T = Tu\frac{u^n - 1}{u - 1} = Tu\frac{u^n - 1}{i}$$

Adică

$$S_n = Tb_n,$$

unde $b_n = \frac{u^n - 1}{i}$.

Exemplul 10. Se efectuează plăți eşalonate anual în sumă de 5000 u.m. cu dobânda $p = 10$. Ce sumă se acumulează după 10 ani în cazul depunerilor anticipate ?

Soluție.

Scanned with OKEN Scanner

$$S_{10} = Tu\frac{u^n - 1}{i} = 5000\left(1 + \frac{10}{100}\right)\frac{(1{,}1)^{10} - 1}{0{,}1} = 87655{,}83 \text{ u.m.}$$

6.6. Taxa pe valoarea adăugată

Taxa pe valoarea adăugată (T.V.A.) reprezintă un venit la bugetul de stat plătit de consumatorii de bunuri şi servicii. Ea reprezintă un impozit care se aplică operaţiilor de vănzare-cumpărare, dar numai diferenţei dintre preţul de vănzare şi cel de cumpărare cănd este cazul. De exemplul :

-livrări de bunuri mobile şi imobile, gaze, energie electrică

-prestări de servicii, etc.

Principiul care stă la baza T.V.A. îl constituie faptul că bunurile produse în ţară sau din import destinate beneficiarilor din ţara noastră sunt impozitate, în timp ce bunurile şi serviciile destinate exportului nu li se aplică T.V.A. Astfel avem două cote de impozitare : i) cota normală pentru operaţiile privind livrările de bunuri mobile şi imobile, prestările de servicii şi importul de produse cu excepţia celor prevăzute la cota zero.

ii) cota zero pentru exportul de anumite bunuri şi prestările de servicii legate direct de export, transportul de persoane, de marfă comandate de beneficiari din străinătate.

Există două categorii de T.V.A. :

- T.V.A. **deductibilă** (în amonte) la *cumpărarea* bunurilor şi serviciilor
- T.V.A. **colectată** (în aval) la *vânzarea* bunurilor şi serviciilor

Dacă încasările T.V.A. sunt mai mari decât plăţile de T.V.A., atunci avem o **datorie** la bugetul de stat, adică T.V.A. de plată.In caz contrar avem o **recuperare** de la bugetul de stat, adică T.V.A.

Scanned with OKEN Scanner

de recuperat. Această analiză poartă numele de **regularizare** la sfârşitul unei perioade.

Exemplul 11. O combină frigorifică costă 400 u.m., iar T.V.A. este de 50 u.m. Să se determine valoarea de producţie a combinei frigorifice şi care este procentul T.V.A.

Soluţie. Valoarea de producţie va fi 400-50=350 u.m.
T.V.A. se calculează cu regula de trei simple :

400……..100%
50……...x%

$x = 50 \cdot 100/400 = 12{,}5\%$.

Scanned with OKEN Scanner

6.7. Aplicații propuse

1. Calculați dobânda simplă produsă prin depunerea unei sume de 10 000 u.m. pe timp de 3 ani, cu un procent de 7%.

2. Care este dobânda unitară folosită de bancă pentru obținerea unei dobânzi de 400 u.m. pentru suma de 8 000 u.m. ?

3. Se depune suma de 10 000 000 lei în regim de dobândă compusă. Dacă în primii doi ani, procentul anual este de 22% iar în următorii doi de 15%, ce sumă rezultă după 4 ani ?

4. O bancă acordă împrumuturi cu un procent anual real de 10%. Ținând cont de o devalorizare anuală de 7%, cu ce procent trebuie acordate creditele ?

5. O persoană a împrumutat în urmă cu 2 ani suma de 10 000 u.m. cu un procent anual $p = 9\%$ pe care urma să o ramburseze astăzi împreună cu dobânda compusă corespunzătoare. Neputând achita dobânda astăzi, solicită o amânare de 1 an. Astfel procentul va creşte cu o unitate. Se cere suma pe care o va plăti după amânarea cerută.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VII
ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITATILOR SI STATISTICA MATEMATICA

7.1. Evenimente. Operații cu evenimente

Vom considera drept noțiune primară, noțiunea de *colectivitate* sau *populație* sau *mulțime*. Elementele unei colectivități pot fi cercetate după o anume proprietate $\mathcal{P}$ (dacă au sau nu au această proprietate $\mathcal{P}$).

Proprietatea $\mathcal{P}$ o vom numi **criteriu de cercetare**. Realizarea în practică a criteriului de cercetare se numeşte **experiență**.

Efectuarea unei experiențe asupra unui element al populației se numeşte **probă** iar rezultatul unei probe poartă numele de **eveniment**.

Pentru a înțelege limbajul şi noțiunile, vom pleca de la o experiență concretă. Considerăm o urnă în care sunt 4 bile albe numerotate de la 1 la 4 şi 6 bile negre numerotate de la 5 la 10. Să efectuăm următoarea experiență : „Se extrage o bilă din urnă după care aceasta se pune înapoi." Această experiență este aleatoare, adică rezultatul ei nu este cunoscut cu certitudine. Ea poate fi repetată de un număr mai mare de ori, fiecare repetare numindu-se probă.

Experiența de mai sus poate avea o mulțime E de rezultate $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Ne putem imagina diverse evenimente :

- evenimentul A : apare numărul 3 ;
- evenimentul B : apare un număr par;
- evenimentul C : apare o bilă albă;

Scanned with OKEN Scanner

- evenimentul D: apare o bilă neagră.

Astfel, vom numi **eveniment aleator** (întâmplător) sau pe scurt **eveniment** orice situație determinată de unul sau mai multe rezultate posibile ale experienței. Fiecărui eveniment îi corespunde o mulțime de cazuri favorabile ce realizează evenimentul considerat, care este o submulțime a mulțimii rezultatelor posibile. Spre exemplu:

- evenimentului A îi corespunde submulțimea $\{3\}$ a lui E;
- evenimentului B îi corespunde $\{2,4,6,8,10\}$ din E;
- evenimentului C îi corespunde $\{1,2,3,4\}$ din E;
- evenimentului D îi corespunde $\{5,6,7,8,9,10\}$.

Rezultă că putem scrie

$$A=\{3\},\ B=\{2,4,6,8,10\},\ \text{etc.}$$

Evenimentele care au un singur caz favorabil şi constau în apariția unui singur rezultat posibil se numesc **evenimente elementare**, iar celelalte **evenimente compuse**.
Astfel, A este eveniment elementar, iar $\{B,C,D\}$ sunt evenimente compuse.

În mulțimea evenimentelor distingem **evenimentul sigur** ca fiind acela care se realizează cu certitudine la orice probă şi **evenimentul imposibil** care nu se realizează în nici o probă. Astfel, evenimentului imposibil îi corespunde ϕ, iar evenimentului sigur îi corespunde mulțimea E.

Fie două evenimente A şi B. Cu aceste evenimente se pot face diferite operații:

- **Suma** a două evenimente (**reuniunea** a două evenimente) se notează „$A\cup B$" şi se citeşte „A sau B". Suma a două evenimente este un eveniment care se produce atunci şi numai atunci când se produce evenimentul A sau evenimentul B sau se produc ambele evenimente A şi B. În cazul unui sistem de n evenimente notate A_i cu $i=1,2...,n$ vom nota suma lor prin $A_1\cup A_2\cup...\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ şi

Scanned with OKEN Scanner

este evenimentul care se realizează atunci când se realizează cel puţin unul dintre ele.

- **Contrariul** unui eveniment se notează cu „CA" sau „$\overline{A}$" şi constă în nerealizarea evenimentului considerat A ($\overline{A}$ este evenimentul care se produce ori de câte ori nu se produce A).

În particular, $\overline{E}=\phi$, $\overline{\phi}=E$.

Evenimentul contrar se mai citeşte „non A".

- **Produsul (intersecţia** evenimentelor) se mai notează cu „$A\cap B$" şi se citeşte „A şi B". Produsul „$A\cap B$" este un nou eveniment care se produce atunci şi numai atunci când se produc simultan şi A şi B.

În cazul unui sistem de n evenimente notate A_i cu $i=1,2...,n$ intersecţia lor se scrie $A_1\cap A_2\cap...\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$, şi acest eveniment se realizează atunci când se realizează simultan evenimentele $A_1,A_2,...,A_n$.

Definiţia 7.1.1. *Spunem că evenimetele* A şi B *sunt* ***incompatibile*** *dacă nu se pot realiza împreună în nici o probă, adică nu au nici un caz favorabil* $A\cap B=\phi$.

Dacă $A\cap B\neq\phi$ atunci evenimentele vor fi **compatibile**.

- **Diferenţa** evenimentelor A şi B se notează „$A\setminus B$" şi reprezintă evenimentul care se produce atunci şi numai atunci, când se produce evenimentul A, dar nu se produce evenimentul B.

Din definiţie deducem că $A\setminus B=A\cap\overline{B}$.

Observaţie. Se pot regăsi datorită izomorfismului toate proprietăţile din teoria mulţimilor transpuse pentru evenimente (asociativitate, comutativitate, distributivitate, etc.).

- **Implicaţia** evenimentelor A şi B se notează "$A\subset B$". Spunem că evenimentul „A implică evenimentul B" dacă realizarea lui A atrage după sine şi realizarea lui B.

Mulţimea evenimentelor este parţial ordonată faţă de relaţia de implicaţie, adică „$\subset$" este o relaţie de ordine parţială.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$, atunci evenimentele A şi B sunt echivalente.

7.2. Câmp de evenimente

Definiția 7.2.1. *Spunem că perechea* (E,K) *formează un* ***corp de evenimente*** *dacă:*

1. $\forall A,B \in K \Rightarrow A \cup B \in K$;
2. $\forall A \in K \Rightarrow \overline{A} \in K$

unde E *este evenimentul sigur, iar* K *o submulțime de evenimente.*

Observație. Acest corp va fi izomorf cu o algebră Boole.

Definiția 7.2.2. *Spunem că* (E,K) *formează un* ***corp borelian de evenimente*** *dacă:*

1. $\forall A_j \in K, j = 1,2,...,n \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in K$;
2. $\forall A \in K \Rightarrow \overline{A} \in K$.

Definiția 7.2.3. *Se numeşte* ***câmp finit de evenimente****, o mulțime finită de evenimente elementare pe care s-a definit un corp de evenimente.*

Definiția 7.2.4. *Se numeşte* ***câmp borelian de evenimente****, o mulțime finită de evenimente elementare pe care s-a definit un corp borelian de evenimente.*

Definiția 7.2.5. *Spunem că o familie de evenimente* $D = \{A_1, A_2, ..., A_n\} \in (E,K)$ *reprezintă o* ***desfacere*** *pentru un eveniment* A *din corpul* (E,K) *dacă:*

1. $A_i \cap A_j = \phi,\ \forall i,j = \overline{1,n}$ *(oricare două elemente sunt incompatibile)*

Scanned with OKEN Scanner

2. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.

Definiția 7.2.6. *O familie de evenimente* $(E_1, E_2, ...E_n)$ *reprezintă o* ***desfacere a evenimentului sigur*** E *în evenimente elementare dacă:*

1. *este o desfacere pentru* E;
2. $\forall B \in \mathcal{P}(\mathrm{E}), \exists E_{i1}, E_{i2}, ..., E_{ik}$ *astfel încât* $B = E_{i1} \cup E_{i2} \cup ..... \cup E_{i-k}$ *cu* $B \neq \phi$.

Definiția 7.2.7. *O mulțime finită de evenimente* $(E_1, E_2, ...E_n)$ *formează* ***mulțimea evenimentelor elementare*** *ale câmpului de evenimente* (E, K) *dacă:*

1. $E_i \cap E_j = \phi$, $\forall i \neq j$, $i, j \in \{1, ..., n\}$;
2. $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$;
3. *oricare ar fi* $A \in (E, K)$, $A \neq \phi$ *există* $k \in \{1, ..., n\}$ *astfel încât* $A = E_{i1} \cup E_{i2} \cup ... \cup E_{ik}$.

7.3. Câmp de probabilitate

Definiția 7.3.1. *Fie un câmp de evenimente* (E, K) *și fie o funcție* $P : (E, K) \to \mathrm{R}$ *care satisface condițiile:*

1. $\forall A \in (E, K)$ *avem* $P(A) \geq 0$
2. $P(E) = 1$, *unde* E *este evenimenult sigur*
3. $\forall A, B \in (E, K)$, *dacă* $A \cap B = \phi$ *atunci* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *(P este aditivă în raport cu reuniunea)*

Atunci P *se numește* ***probabilitate*** *pe* K *iar* tripletul (E, K, P) formează un **câmp de probabilitate**.

Scanned with OKEN Scanner

Consecințe.

C_1) Fie $n \in N$. Oricare ar fi evenimentele $A_1, A_2, ..., A_n \in (E,K)$ astfel încât $A_i \cap A_j \neq \phi$ unde $i \neq j$ avem $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

C_2) Definiția clasică a probabilității.

Fie un câmp finit de evenimente (E,K). Fie o mulțime $\{E_1, E_2, ...E_n\}$ cu proprietatea că $A = E_{i1} \cup E_{i2} \cup ... \cup E_{ik}$, cu $E_{ij} \cap E_{ik} = \phi$, $ij \neq ik$. *Definim* ***probabilitatea*** *unui eveniment* A *ca fiind numărul cazurilor favorabile pentru a se produce evenimentul* A *raportat la numărul cazurilor totale.*

Demonstrația rezultă din consecința **C_1):**

$$P(A) = P(E_{i1} \cup E_{i2} \cup ... \cup E_{ik}) = P(E_{i1}) + P(E_{i2}) + ... + P(E_{ik}) =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n} = \frac{k}{n},$$

deci $P(A) = \frac{k}{n}$, unde k reprezintă numărul cazurilor favorabile, iar n numărul total de cazuri.

C_3) Dacă avem un element oarecare $A \in (E,K)$ atunci $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Demonstrație. Se cunoaşte din teoria mulțimilor că $\begin{cases} A \cup \bar{A} = E \\ A \cap \bar{A} = \phi \end{cases}$.

În prima relație aplicăm probabilitatea şi apoi consecința **C_1)** şi obținem:

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cup CA) = P(E) \\ P(A) + P(CA) = P(E) \end{array}\right| \Rightarrow P(CA) = 1 - P(A).$$

Scanned with OKEN Scanner

C_4) Probabilitatea evenimentelor imposibile este 0, adică $P(\phi)=0$.

Demonstrație. Relației $\phi \cup E$ îi aplicăm probabilitatea P şi obținem:

$$P(\phi \cup E)=P(\phi)+P(E)=P(E)\Rightarrow P(\phi)=0$$

C_5) Probabilitatea unui eveniment ia valori în intervalul $[0;1]$, adică $0\le P(A)\le 1$.

Demonstrație. Este evident că $P(A)\ge 0$ din axioma 1. a definiției 3.1., iar din consecința C_3) obținem $P(A)=1-P(\overline{A})$.

Cum $P(\overline{A})\ge 0\Rightarrow P(A)\le 1$.

C_6) Dacă $A\subset B$ atunci $P(A)\le P(B)$.

Demonstrație. Ştim că B poate fi scris sub forma $A\cup(B\setminus A)=A\cup(B\cap\overline{A})$. Calculând probabilitatea ultimei relații şi ținând cont de faptul că $A\cap(B\cap\overline{A})=\phi$, obținem:

$$P(B)=P\left(A\cup(B\cap\overline{A})\right)=P(A)+P(B\cap\overline{A})\Rightarrow P(B)\ge P(A).$$

C_7) Fie A şi B două evenimente. Atunci

$$P(B\setminus A)=P(B)-P(A\cap B).$$

Demonstrație. Relației

$$B=(B\setminus A)\cup(A\cap B)$$

îi aplicăm probabilitatea P şi ținând cont de consecințele anterioare şi de faptul că $(B\setminus A)\cap(A\cap B)=\phi$ avem:

$$P(B)=P\left[(B\setminus A)\cup(A\cap B)\right]=P(B\setminus A)+P(A\cap B)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(B\setminus A)=P(B)-P(A\cap B)$$

C_8) Dacă $A\subset B$ atunci $P(B\setminus A)=P(B)-P(A)$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. $P(B\setminus A)=P(B)-P(\underbrace{A\cap B}_{A})$ pentru că

$A\subset B\Rightarrow A\cap B=A$.

C₉) Probabilitatea reuniunii de evenimente este:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

Demonstrație. Știm că

$$A\cup B=A\cup\left[B\setminus(A\cap B)\right],$$

relație căreia îi aplicăm probabilitatea și obținem:

$$P(A\cup B)=P(A)+P\left[B\setminus(A\cap B)\right],$$

pentru că $A\cup\left[B\setminus(A\cap B)\right]=\phi$.

Cum $A\cap B\subset A$ conform consecinței **C₇)** avem

$$P\left(B\setminus(A\cap B)\right)=P(B)-P(A\cap B),$$

de unde rezultă relația dorită.

C₁₀) Generalizarea consecinței **C₉)**.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i\le j\le n}P(A_i\cap A_j)+\sum_{1\le i\le j\le k\le n}P(A_i\cap A_j\cap A_k)-\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$

Demonstrația se realizează prin inducție matematică.

C₁₁) Fie A și B două evenimente oarecare. Atunci

$$P(A\cup B)\le P(A)+P(B).$$

Demonstrația rezultă din consecința **C₉)** și axioma 1 din definiția 3.7.

C₁₂) (Generalizarea consecinței **C₁₁)**:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

Scanned with OKEN Scanner

C_{13}) Inegalitatea lui Boole.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(CA_i),$$

oricare ar fi evenimentele A_i, $i = 1,2,...,n$ din (E,K,P)

Demonstrația rezultă din consecința **C_3).**

Observație. Inegalitatea lui Boole ne dă o limită inferioară pentru probabilitatea produsului evenimentelor.
Se mai poate scrie sub forma

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1),$$

pentru că:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P\left(\overline{A_i}\right) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left(1 - P(A_i)\right) = 1 - \left(n - \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\right) = 1 - n + \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Definiția 7.3.2. *Fie un şir* (A_n), $\forall A_i \in (E,K)$, $i = 1,2,...,n$. *Spunem că şirul* (A_n) *este un şir* ***descendent*** *de evenimente dacă* $\forall i \leq j$ *cu* $i, j \in N$ *avem* $A_i \supseteq A_j$.

Definiția 7.3.3. *Spunem că un şir de evenimente* (A_n) *este* ***ascendent*** *dacă* $\forall i, j \in N$ *cu* $i \geq j$ *avem* $A_i \subseteq A_j$.

Teorema 7.3.1. *Dacă* (A_n) *este un şir descendent de evenimente şi* $\bigcap_{n \in N} A_n = A$, *atunci are loc relația:*

$$\lim_{n \to N} P(A_n) = P(\bigcap_{n \in N} A_n) = P(A).$$

Observație. Convergența din teoremă este dată în sensul celei din analiza clasică.

Scanned with OKEN Scanner

7.4. Probabilităţi condiţionate

Fie un câmp de probabilităţi (E,K,P) şi un eveniment A astfel încât $P(A)\neq 0$.

Definiţia 7.4.1. *Numim* ***probabilitate condiţionată*** *a evenimentului B de către evenimentul A din acelaşi câmp şi notăm $P_A(B)$, raportul dintre probabilitatea produsului şi probabilitatea lui A.*

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

Consecinţe.

C1) Din definiţia probabilităţilor condiţionate rezultă **regula de înmulţire a probabilităţilor**:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B).$$

Această formulă se poate generaliza.

Dacă avem n evenimente atunci:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdot\ldots\ldots\cdot P_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Exemplu. Un lot de 100 de piese este supus controlului. Condiţia ca acest lot să fie respins este găsirea cel puţin a unei piese defecte la 5 piese verificate. Care este probabilitatea ca lotul să fie respins dacă el conţine 1% piese defecte şi piesa luată nu se mai pune înapoi.

Soluţie. Fie A_i evenimentul ca piesa i controlată să fie bună şi A evenimentul ca toate cele 5 piese controlate să fie bune. Atunci

$$A=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$$

$$P(A)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdot P_{A_1\cap A_2\cap A_3}(A_4)\cdot P_{A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4}(A_5)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \frac{99}{100} \cdot \frac{98}{99} \cdot \frac{97}{98} \cdot \frac{96}{97} \cdot \frac{95}{16} = \frac{95}{100}.$$

Rezultă că $P(\bar{A}) = 1 - \frac{95}{100} = 0,05$.

C_2) Dacă $A \subset B$ atunci $P_A(B) = 1$.

C_3) Formula de adunare a probabilităților condiționate.

Fie n evenimente $A_i \in K$, $i = 1,2,...,n$ şi un eveniment A cu $P(A) \neq 0$. Atunci

$$P_A\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P_A(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P_A(A_i \cap A_j) + ... + (-1)^n P_A(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n).$$

C_4) Formula probabilității totale

Fie un câmp (E, K, P) şi o desfacere în evenimente incompatibile $E = (A_1, A_2, ..., A_n)$ a evenimentului sigur E. Fie un eveniment $X \in K$. Atunci are loc relația:

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P_{A_i}(X).$$

Demonstrație. Dacă $A_1, A_2, ..., A_n$ constituie o desfacere în evenimente incompatibile a evenimentului total E, atunci şi mulțimea $\{X \cap A_1, X \cap A_2, ..., X \cap A_i\}$ reprezintă o desfacere în evenimente incompatibile a evenimentului E, deci

$$(X \cap A_i) \cap (X \cap A_j) = \phi.$$

Pentru că $\bigcup_{i=1}^{n} (X \cap A_i) = X$, obținem $P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X \cap A_i)$ şi utilizând regula de înmulțire a probabilităților obținem relația dorită.

Exemplu. La însămânțarea grâului se folosesc patru tipuri de semințe: categoria I, categoria II, categoria III şi categoria IV. Se ştie că probabilitatea ca un spic să aibă mai mult de 50 de boabe pentru fiecare este: cat. I- 0,2; cat. II- 0,3; cat.III- 0,1 şi cat. IV-

Scanned with OKEN Scanner

0,4. Se cere probabilitatea ca să se obțină spice cu mai mult de 50 de boabe știind că probabilitățile de a semăna cu grâu din fiecare categorie sunt egale.

Soluție.

Notăm evenimentele:

- A_1 = evenimentul de-a cultiva grâu de categoria I
- A_2 = evenimentul de-a cultiva grâu de categoria II
- A_3 = evenimentul de-a cultiva grâu de categoria III
- A_4 = evenimentul dea cultiva grâu de categoria IV

Atunci $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)=\frac{1}{4}$.

Notăm cu X evenimentul ca un spic să aibă mai mult de 50 boabe. Atunci probabilitatea ca evenimentul X să se întâmple dacă se cultivă griu de categoria I va fi $P_{A_1}(X)=0,2$.

Analog, pentru celelalte categorii avem: $P_{A_2}(X)=0,3$, $P_{A_3}(X)=0,1$, $P_{A_4}(X)=0,4$.

Pentru a calcula probabilitatea ca să se obțină spice cu mai mult de 50 de boabe (necontând categoria) utilizăm formula dată de consecința 4 şi astfel obținem:

$$P(X)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(X)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(X)+P(A_3)\cdot P_{A_3}(X)+P(A_4)\cdot P_{A_4}(X)=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot 0,2+\frac{1}{4}\cdot 0,3+\frac{1}{4}\cdot 0,1+\frac{1}{4}\cdot 0,4=\frac{1}{4}.$$

C_5) Formula lui Bayes.

În aceleaşi condiții ca şi formula probabilității totale are loc relația :

$$P_X(A_k)=\frac{P(A_k)\cdot P_{A_k}(X)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)\cdot P_{A_k}(X)}.$$

Exemple. 1. Trei fabrici trimit acelaşi produs la un magazin, cantitățile trimise fiind proporționale cu 3, 2, respectiv 5. Se ştie

Scanned with OKEN Scanner

că prima fabrică dă rebut de 1%, a doua fabrică produce 2,5% produse cu defecte, iar a treia fabrică produce 2% produse cu defecte. O anumită cantitate de produse în valoare de 6300 euro, care a fost vândută, este restituită magazinului de către cumpărător deoarece avea defecte, iar suma corespunzătoare este restituită cumpărătorului. Ce sumă trebuie imputată fiecărei fabrici?

Soluție.

Notăm cu X evenimentul ca un produs să aibă defect şi cu:

- A_1 evenimentul ca produsul să fie de la prima fabrică
- A_2 evenimentul ca produsul să fie de la a doua fabrică
- A_3 evenimentul ca produsul să fie de la a treia fabrică

Probabilitățile acestor evenimente vor fi:

$$P(A_1)=\frac{3}{10};P(A_2)=\frac{2}{10};P(A_3)=\frac{5}{10},$$

iar probabilitățile să obținem un produs cu defect de la prima, a doua, respectiv a treia fabrică vor fi date de:

$$P_{A_1}(X)=\frac{1}{100};P_{A_2}(X)=\frac{2,5}{100};P_{A_3}(X)=\frac{2}{100}.$$

Sumele imputate fiecărei fabrice le vom nota cu $S_1,S_2,S_3 \approx P_X(A_1),P_X(A_2),P_X(A_3)$ şi putem scrie relația:

$$\frac{S_1}{P_X(A_1)}=\frac{S_2}{P_X(A_2)}=\frac{S_3}{P_X(A_3)}=\frac{S_1+S_2+S_3}{P_X(A_1)+P_X(A_2)+P_X(A_3)}=\frac{6300}{1}.$$

Pentru a rezolva problema este suficient să ştim probabilitățile $P_X(A_1),P_X(A_2),P_X(A_3)$, pe care le vom determina utilizând formula lui Bayes:

$$P_X(A_i)=\frac{P(A_i)\cdot P_{A_i}(X)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)\cdot P_{A_i}(X)}.$$

$$P_X(A_1)=\frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{100}}{\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{100}+\frac{2}{10}\cdot\frac{2,5}{100}+\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{100}}=\frac{\frac{3}{1000}}{\frac{3}{1000}+\frac{5}{1000}+\frac{10}{1000}}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Analog se procedează pentru $P_X(A_2)=\frac{5}{18}$ şi pentru $P_X(A_3)=\frac{5}{9}$. Înlocuind în şirul de rapoarte egale de mai sus obţinem sumele: $S_1=1050$, $S_2=1750$, $S_3=3500$.

2. O urnă conţine 10 bile albe şi negre în proporţie necunoscută. Se extrag pe rând 3 bile cu revenirea bilei extrase în urnă. Dacă toate cele trei bile extrase sunt albe, ne interesează probabilitatea ca urna să conţină k bile albe şi $10-k$ bile negre, unde $k\in\{1,2,...,9\}$ este fixat.

Soluţie. Notăm cu A_k evenimentul ca urna să conţină k bile albe şi $10-k$ bile negre, $k\in\{1,2,...,9\}$.

Înainte de a face extragerile putem spune că

$$P(A_1)=P(A_2)=...=P(A_9)=\frac{1}{9}.$$

Fie X evenimentul ca cele k bile extrase să fie albe. Conform formulei lui Bayes avem

$$P_X(A_i)=\frac{P_{A_i}(X)}{P_{A_1}(X)+P_{A_2}(X)+...+P_{A_9}(X)}$$

$$=\frac{k^3}{1^3+2^3+...+9^3}=\frac{k^3}{2025}.$$

7.5. Evenimente independente.

Fie un câmp de evenimente (E,K,P) şi $A,B\in(E,K,P)$.

Definiţia 7.5.1. *Spunem că evenimentele A şi B sunt **independente** dacă*

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B).$$

Observaţii.

1. Dacă A şi B sunt independente, se spune că ele sunt şi P-independente.

Scanned with OKEN Scanner

2. Ştim că $P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$. Cum $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$, pentru evenimentele independente avem $P_A(B)=P(B)$. Analog $P_B(A)=P(A)$.

Exemplu. O urnă conţine 3 bile albe şi 6 bile negre, iar alta conţine 4 bile albe şi 5 bile negre. Se extrage la întâmplare câte o bilă din fiecare urnă. Notăm cu A respectiv B evenimentele de scoatere a unei bile albe din prima urnă şi a unei bile negre din a doua urnă. Rezultă că

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{3}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{15}{81}=\frac{5}{27}$$

deoarece cele două evenimente sunt independente.

Teorema 7.5.1. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) A *şi* B *sunt independente.*
2) $\overline{A}$ *şi* B *sunt independente.*
3) A *şi* $\overline{B}$ *sunt independente.*
4) $\overline{A}$ *şi* $\overline{B}$ *sunt independente.*

Generalizare. Fie familia $A_1,A_2,...,A_n$ de evenimente din câmpul (E,K,P). Spunem că $A_1,A_2,...,A_n$ sunt independente în totalitatea lor, dacă orice subfamilie este independentă sau P- independentă, adică

$$P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot...\cdot P(A_n)=P(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n).$$

Definiţia 7.5.2. *Fie familia finită de evenimente* $E=\{A_1,A_2,...,A_n\}$. *Spunem că evenimentele sunt* ***independente*** s ***câte*** s *dacă orice submulţime de* s *evenimente luate din familia dată, ce conţine* n *evenimente este independentă adică:*

$$P(A_{i1}\cap A_{i2}\cap...\cap A_{is})=P(A_{i1})\cdot P(A_{i2})\cdot...\cdot P(A_{is}).$$

Observaţie. Dacă evenimentele familiei $E=\{A_1,A_2,...,A_n\}$ sunt independente în totalitatea lor rezultă că sunt independente s câte s. Reciproc nu.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Fie un tetraedru omogen colorat astfel: faţa A_1 cu alb, faţa A_2 cu roşu, faţa A_3 cu negru, faţa A_4 cu toate cele trei culorile. Aşezăm la întâmplare acest tetraedru pe una din feţele sale.
Notăm:

- A_1 evenimentul de a- l aşeza pe faţa albă;
- A_2 : evenimentul de a- l aşeza pe faţa roşie;
- A_3 : evenimentul de a- l aşeza pe faţa neagră

Aceste evenimente vor avea probabilităţile:

$$P(A_1)=\frac{1}{4};P(A_2)=\frac{1}{4};P(A_3)=\frac{1}{4}.$$

Studiem independenţa: $\begin{cases} P(A_1\cap A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2) \\ P(A_1\cap A_3)=P(A_1)\cdot P(A_3) \\ P(A_2\cap A_3)=P(A_2)\cdot P(A_3) \end{cases}$. Evenimentele A_1, A_2, A_3 sunt independente două câte două.

Pentru a fi independente în totalitatea lor ar trebui ca

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)$$

Dar în acest caz obţinem $\frac{1}{4}\neq\frac{1}{64}$ şi în concluzie evenimentele nu sunt independente în totalitatea lor.

Definiţia 7.5.3. *Fie şirul de evenimente* $\{A_n\}$. *Spunem că aceste evenimente sunt* ***independente*** *dacă orice subfamilie finită de evenimente din* $\{A_n\}$ *este independentă (definiţia este valabilă şi pentru un* σ *- câmp de probabilitate).*

7.6. Regula de adunare a probabilităţilor evenimentelor independente

Scanned with OKEN Scanner

Ştim că pentru evenimente oarecare regula de adunare este:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\le i\le j\le n} P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n).$$

Pentru **evenimente independente** avem:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\le i\le j\le n} P(A_i)\cdot P(A_j)+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$$

Exemplu. Trei sportivi trag simultan asupra unei ţinte. Se ştie că probabilitatea ca primul sportiv să nimerească ţinta în centru este de $0,9$, probabilitatea ca al doilea sportiv să nimerească ţinta în centru este de $0,8$, iar probabilitatea ca al treilea sportiv să nimerească ţinta în centru este de $0,7$. Ce şanse sunt ca ţinta să nu fie nimerită în centru?

Soluţie. Notăm

- A_1 evenimentul ca primul sportiv să nimerească ţinta în centru;
- A_2 evenimentul ca al doilea sportiv să nimerească ţinta;
- A_3 - evenimentul ca al treilea sportiv să nimerească ţinta.

Probabilităţile acestor evenimente sunt:

$$P(A_1)=0,9;P(A_2)=0,8;P(A_3)=0,7.$$

Metoda I.

Calculăm mai întâi probabilitatea ca ţinta să fie nimerită în centru. Evenimentele A_1, A_2, A_3 sunt independente în totalitatea lor şi astfel putem scrie:

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-\left[P(A_1)\cdot P(A_2)+P(A_1)\cdot P(A_3)+\right.$$
$$\left.+P(A_2)\cdot P(A_3)\right]+P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=$$
$$=0,9+0,8+0,7-\left[0,9\cdot 0,8+0,9\cdot 0,7+0,8\cdot 0,7\right]+0,9\cdot 0,8\cdot 0,7=\frac{994}{1000}$$

Probabilitatea ca ţinta să nu fie nimerită este egală cu

$$1-\frac{994}{1000}=\frac{6}{1000}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Metoda II.

Dacă A_1, A_2, A_3 sunt independente rezultă că şi contrarele lor sunt independente:

$$P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10};$$

$$P(\bar{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - \frac{8}{10} = \frac{2}{10};$$

$$P(\bar{A}_3) = 1 - P(A_3) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}.$$

Probabilitatea ca ţinta să nu fie nimerită este:

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{1000}.$$

7.7. Scheme probabilistice clasice

7.7.1. Schema bilei nerevenite

Fie o urnă U ce conţine a bile albe şi b bile negre. Extragem o bilă la întâmplare, îi reţinem culoarea şi o punem deoparte. Repetăm procedeul de n ori. Se cere probabilitatea ca din cele n bile extrase, k să fie albe şi $n-k$ să fie negre.

Observaţie. Problema este echivalentă cu următoarea: se dau n urne cu aceeaşi compoziţie, se extrage câte o bilă din fiecare urnă. Se cere probabilitatea ca din cele n bile extrase k să fie albe şi $n-k$ să fie negre.

În rezolvarea problemei vom utiliza definiţia clasică a probabilităţii. Cele k bile albe se pot scoate dintre cele a bile albe în C_a^k moduri. La fiecare grupă de k bile albe corespund C_b^{n-k} grupe de bile negre. Deci numărul cazurilor favorabile este $C_a^k \cdot C_b^{n-k}$. Pe de altă parte, cele n bile se pot extrage dintre cele

Scanned with OKEN Scanner

$a+b$ bile din urnă în C_{a+b}^{n} moduri. Acesta va fi numărul cazurilor posibile.

Probabilitatea cerută este dată de formula: $P=\frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$.

Această formulă se poate ***generaliza*:**

Se consideră o urnă cu a_1 bile de culoarea 1, a_2 bile de culoarea 2,..., a_s bile de culoarea s. Se fac n extrageri, fără întoarcerea bilei în urnă. Se cere probabilitatea ca să extragem k_1 bile de culoarea 1, k_2 bile de culoarea 2, ... , k_s bile de culoarea s, unde $k_1+k_2+...+k_s=n$.

Probabilitatea cerută va fi:

$$P=\frac{C_{a_1}^{k_1} \cdot C_{a_2}^{k_2} \cdot ... \cdot C_{a_s}^{k_s}}{C_{a_1+a_2+...+a_s}^{k_1+k_2+...+k_s}}.$$

Exemplu. Într- un lot de 100 de piese se află 60 de calitate superioară, 30 bune, iar restul de 10 cu defecte ce trebuie remediate. Care este probabilitatea ca această distribuție să fie găsită într-un eşantion de 10 piese ?

Soluție. Probabilitatea cerută va fi:

$$P=\frac{C_{60}^6 C_{30}^3 C_{10}^1}{C_{100}^{10}}.$$

7.7.2. Schema bilei revenite (schema lui Bernoulli)

Fie o urnă U ce conține a bile albe şi b bile negre. Extragem o bilă din urnă, îi reținem culoarea şi o introducem înapoi în urnă. Repetăm procedeul de n ori. Se cere probabilitatea ca din cele n bile extrase k să fie albe şi $n-k$ să fie negre.

Scanned with OKEN Scanner

În rezolvarea problemei vom utiliza definiția clasică a probabilității. Probabilitatea de a scoate o bilă albă este: $p=\frac{a}{a+b}$, iar probabilitatea de a scoate o bilă neagră este $q=\frac{b}{a+b}$.

Fie A evenimentul ca o bilă extrasă să fie albă şi fie B evenimentul ca o bilă extrasă să fie neagră.

$E_1 = A\cap B\cap A\cap B\cap..\cap A\cap B$ unde A apare de k ori şi B apare de $n-k$ ori.

Astfel

$$P(E_1)=P(A\cap B\cap A\cap B\cap...\cap A\cap B)=P(p\cdot q\cdot p\cdot q\cdot...\cdot p\cdot q)=p^k\cdot q^{n-k}.$$

Dintre cele n bile extrase putem găsi C_n^k grupe de evenimente de tipul E_1. Aceste evenimente sunt incompatibile două câte două şi fiecare eveniment are aceeaşi probabilitate $p^k\cdot q^{n-k}$.

Dar fiind incompatibile, probabilitatea reuniunii lor va fi suma probabilităților, deci probabilitatea cerută va fi:

$$P=\sum_{k=1}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Observații.

1) Urna Bernoulli se caracterizează prin faptul că probabilitățile p şi q rămân constante de lungul întregii experiențe şi p şi q sunt complementare $(p+q=1)$.

2) Dacă vom considera polinomul $(p(x)+q(y))^n$ pe care îl vom dezvolta după binomul lui Newton obținem:

$$\left(p(x)+q(y)\right)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\cdot p^k\cdot x^k\cdot q^{n-k}\cdot y^{n-k}.$$

Se observă că, coeficienții lui x^k şi respectiv al lui y^{n-k} reprezintă tocmai probabilitățile cerute; din acest motiv se mai numeşte schema binomială.

Generalizare.

Scanned with OKEN Scanner

Putem considera că în urnă, în loc de două culori, ar fi s culori astfel încât urna ar avea următoarea compoziție: a_1 bile de culoare 1, a_2 bile de culoare 2;...; a_s bile de culoare s. Atunci probabilitățile de a scoate o bilă de culoare 1, 2, ... respectiv s vor fi date de:

$$p_1 = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + ... + a_s}, p_2 = \frac{a_2}{a_1 + a_2 + ... + a_s},$$

respectiv $$p_s = \frac{a_s}{a_1 + a_2 + ... + a_s}.$$

Se scoate o bilă şi i se notează culoarea după care se reintroduce în urnă. Se repetă procedeul de n ori. Se cere probabilitatea ca din cele n bile extrase k_1 să fie de culoarea 1, k_2 de culoarea 2, ... k_s de culoarea s.

Vom avea:

$$P = \frac{n!}{k_1! \cdot ... \cdot k_s!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot .... \cdot p_s^{k_s}.$$

Exemplu. Se aruncă două zaruri de 10 ori. Care este probabilitatea să apară de 4 ori suma 7?

Soluție. Evenimentul apariției sumei 7 are probabilitatea $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Aplicăm schema lui Bernoulli, unde

$$p = \frac{1}{6}, q = \frac{5}{6}, n = 10, k = 4$$

şi obținem probabilitatea

$$C_{10}^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^6.$$

7.7.3. Schema lui Poisson.

Scanned with OKEN Scanner

Fie n urne, notate $U_1, U_2, ..., U_n$. Presupunem că în fiecare urnă se găsesc a_i bile albe, respectiv b_i bile negre, unde $i = \overline{1,n}$. Din fiecare urnă se extrage câte o bilă. Se cere probabilitatea ca din cele n bile extrase k să fie albe şi $n-k$ să fie negre.

Notăm cu p_i probabilitatea ca să obţinem o bilă albă în urma extragerii din urna i.

Atunci probabilitatea evenimentului complementar

$$q_i = 1 - p_i$$

va reprezenta probabilitatea ca să obţinem o bilă negră în urma extragerii din urna i.

Fie A evenimentul să obţinem k bile albe şi $n-k$ bile negre. Astfel, A este dat de reuniunea evenimentelor:

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap ... \cap \overline{A}_{i_n},$$

unde indicii i_k, $1 \le k \le n$ sunt diferiţi doi câte doi, iar probabilitatea acestui eveniment va fi dată de

$$p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot ... \cdot p_{i_k} \cdot q_{i_{k+1}} \cdot ... \cdot q_{i_n}.$$

Probabilitatea evenimentului A va fi suma produselor de această formă.

În concluzie, probabilitatea evenimentului A este coeficientul lui x^k din dezvoltarea:

$$(p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2)...(p_n x + q_n).$$

Exemplu. Se dau 3 urne: prima conţine 2 bile albe şi 3 bile negre, a doua conţine 4 bile albe şi o bilă neagră şi a treia conţine 3 bile albe şi 2 bile negre. Din fiecare urnă se extrage câte o bilă. Care este probabilitatea ca două bile să fie albe şi una neagră?

Soluţie. Aplicând schema lui Poisson pentru

$$n = 3,\ k = 2,\ p_1 = \frac{2}{5},\ p_2 = \frac{4}{5},\ p_3 = \frac{3}{5},$$

probabilitatea cerută este egală cu coeficientul lui x^2 din polinomul

$$\left(\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}x + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

adică

$$P(A)=\frac{58}{125}.$$

7.8. Aplicații

1. Fie o urnă cu 15 bile albe şi 17 bile negre. Se extrage o bilă. Care este probabilitatea ca bila extrasă să fie neagră? Dar albă?

Soluție. În urnă se află în total 32 de bile. Probabilitatea ca bila să fie neagră, respectiv albă este dată de raportul dintre numărul cazurilor favorabile şi numărul cazurilor totale:

$$P(A)=\frac{17}{32}, \text{ respectiv } P(B)=\frac{15}{32}.$$

2. Într-o urnă se găsesc 20 bile numerotate de la 1 la 20. Se face o extragere şi se cere probabilitatea ca bila extrasă să aibă un număr divizibil cu 3.

Soluție. În urnă se găsesc 5 bile notate cu numere divizibile cu 3: $3, 6, 9, 12, 15, 18$. Deci probabilitatea ca bila extrasă să aibă un număr divizibil cu 3 este $P(A)=\frac{6}{20}$.

3. S-a amestecat un pachet de 20 de cărți numerotate de la 1 la 20. Care este probabilitatea ca deasupra să fie carte cu numărul 10?

Soluție. Numărul cazurilor totale este egal cu $20!$, iar nărul cazurilor favorabile este $19!$. Atunci probabilitatea ca deasupra să fie carte cu numărul 10 va fi dată de:

Scanned with OKEN Scanner

$$P(A)=\frac{19!}{20!}=\frac{1}{20}.$$

4. Într-o librărie se găsesc cărți scrise de către 100 de autori diferiți, dintre care 10 nu sunt români. Alegem la întâmplare 10 cărți. Care este probabilitatea ca toate cărțile alese să aibă autori români? Dar probabilitatea ca dintre cărțile alese cel puțin una să aibă un autor străin?

Soluție. Numărul cazurilor totale este dat de numărul de moduri în care putem alege cele 10 cărți din totalul de 100, adică C_{100}^{10}. Notând cu A evenimentul ca toate cărțile alese să aibă autori români, obținem numărul cazurilor favorabile egal cu C_{90}^{10}. Atunci:

$$P(A)=\frac{C_{90}^{10}}{C_{100}^{10}}=\frac{90!}{10!80!}\cdot\frac{10!90!}{100!}=\frac{81\cdot 82\cdot\ldots\cdot 90}{91\cdot 92\cdot\ldots\cdot 100}.$$

Probabilitatea ca dintre cărțile alese cel puțin una să aibă un autor străin va fi dată de:

$$1-P(A)=1-\frac{C_{90}^{10}}{C_{100}^{10}}=1-\frac{81\cdot 82\cdot\ldots\cdot 90}{91\cdot 92\cdot\ldots\cdot 100}.$$

5. La loterie sunt 49 de numere şi se extrag 6. Care este probabilitatea să obținem 4 numere stabilite dinainte?

Soluție. Probabilitatea va fi dată de: $P(A)=\frac{C_{45}^{2}\cdot C_{4}^{4}}{C_{49}^{6}}$.

6. În două depozite alăturate se află câte 100 de piese, dintre care în primul 5 sunt defecte, iar în al doilea 3 sunt defecte. Se intră la întâmplare în unul din depozite şi se alege o piesă. Care este probabilitatea ca piesa extrasă să fie bună?

Soluție. Probabilitățile să intrăm în primul depozit sau în al doilea sunt egale între ele:

$$P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se intră în primul depozit probabilitatea să se aleagă o piesă bună este $P_{A_1}(A)=\frac{95}{100}$, iar dacă se intră in al doilea depozit probabilitatea va fi $P_{A_2}(A)=\frac{97}{100}$.

Astfel probabilitatea ca piesa extrasă să fie bună, necontând în care depozit s-a intrat, va fi:

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{95}{100}+\frac{1}{2}\cdot\frac{97}{100}=\frac{192}{200}.$$

7. Fie o urnă cu 15 bile albe şi 10 bile negre. Se extrag succesiv 2 bile. Se cere probabilitatea ca:

a) cele două bile extrase să fie albe;
b) cele două bile extrase să fie negre;
c) prima bilă să fie albă şi a doua neagră;
d) prima bilă să fie neagră şi a doua albă.

Soluţie.

a) Fie A_1 evenimentul ca prima bilă să fie albă şi A_2 evenimentul ca a doua bilă extrasă să fie tot albă. Atunci $P(A_1)=\frac{15}{25}$ şi $P_{A_1}(A_2)=\frac{14}{24}$ deoarece a doua bilă se extrage din compoziţia rămasă în urnă. Dorim ca cele două evenimente să se petreacă simultan, deci calculăm:

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)=\frac{15}{25}\cdot\frac{14}{24}=\frac{7}{20}.$$

b) Fie B_1 evenimentul ca prima bilă să fie neagră şi B_2 evenimentul ca a doua bilă extrasă să fie tot neagră. Analog, vom calcula:

$$P(B_1\cap B_2)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(B_2)=\frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24}=\frac{3}{20}.$$

c) Fie A evenimentul ca prima bilă să fie albă şi B evenimentul ca a doua bilă extrasă să fie neagră. Atunci:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{15}{25}\cdot\frac{10}{24}=\frac{1}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

d) Fie A evenimentul ca prima bilă să fie neagră şi B evenimentul ca a doua bilă extrasă să fie albă. Atunci:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{10}{25}\cdot\frac{15}{24}=\frac{1}{4}.$$

8. Fie o urnă cu 9 bile albe şi 8 bile negre. Se extrag succesiv 2 bile. Se cere probabilitatea ca:

a) Bilele să fie de aceeaşi culoare;

b) Bilele să fie de culori diferite.

Soluţie.

a) Fie A_1 evenimentul ca ambele bile să fie albe şi A_2 evenimentul ca ambele bile extrase să fie negre. Atunci

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)=\frac{9}{17}\cdot\frac{8}{16}+\frac{8}{17}\cdot\frac{7}{16}-0=\frac{16}{34}.$$

b) $P(B)=\frac{9}{17}\cdot\frac{8}{16}+\frac{8}{17}\cdot\frac{9}{16}=\frac{18}{34}$.

9. Se aruncă un zar cu feţele numerotate de la 1 la 6. Aflaţi probabilitatea ca să obţinem faţa numerotată cu 5 sau cu 6.

Soluţie. $P(A)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-0=\frac{1}{3}$, unde A_1 este evenimentul să obţinem faţa cu numărul 5, iar A_2 este evenimentul să obţinem faţa cu numărul 6.

10. Un candidat la licenţă trebuie să extragă 3 bilete din cele 22 pregătite, dintre care 7 la analiză matematică, 5 la algebră şi 10 la informatică. Care este probabilitatea ca un student să extragă 3 bilete de informatică? Dar să extragă în ordine unul de informatică, unul de analiză şi unul de algebră?

Soluţie. Fie A_i, $i=\overline{1,3}$ evenimentul biletul i extras să fie de informatică.

Scanned with OKEN Scanner

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{10}{22} \cdot \frac{9}{21} \cdot \frac{8}{20} = \frac{6}{67}.$$

11. Pentru iluminatul stardal al unui oraş se aduc becuri de acelaşi tip de la 3 fabrici. Se ştie că prima fabrică produce 30% din totalul becurilor şi dă 2% rebut, a doua fabrică produce 50% şi dă 1% rebut, iar a treia fabrică produce 20% şi dă un rebut de 2%.

a) Care este probabilitatea ca un bec luat la întâmplare să fie defect?

b) Dacă se alege la întâmplare un bec, care s-a dovedit a fi defect, care este probabilitatea ca el să provină de la a doua fabrică?

Soluţie.

a)Fie A_i, $i = \overline{1,3}$ evenimentul ca becul ales să provină de la fabrica i. Atunci avem:

$$P(A_1) = \frac{3}{10};\ P(A_2) = \frac{1}{2};\ P(A_3) = \frac{1}{5}.$$

Probabilitatea ca să alegem un bec defect de la prima fabrică este: $P_{A_1}(A) = \frac{2}{100}$.

Analog, pentru a doua fabrică avem $P_{A_2}(A) = \frac{1}{100}$, respectiv pentru a treia avem $P_{A_3}(A) = \frac{2}{100}$.

Utilizând formula probabilităţii totale găsim:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(A) + P(A_3) \cdot P_{A_3}(A)$$

$$P(A) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{100} = \frac{3}{200}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă se alege la întâmplare un bec, care s-a dovedit a fi defect, probabilitatea ca el să provină de la a doua fabrică se determină utilizând formula lui Bayes.

$$P_A(A_2)=\frac{P(A_2)\cdot P_{A_2}(A)}{P(A_1)\cdot P_{A_1}(A)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(A)+P(A_3)\cdot P_{A_3}(A)}$$

$$P_A(A_2)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100}}{\frac{3}{100}\cdot\frac{2}{100}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{100}}=\frac{1}{3}$$

12. Se dau două urne identice la exterior. Prima urnă conține 10 bile albe şi 6 bile negre, iar a doua urnă conține 6 bile albe şi 12 bile negre. Dintre aceste două urne se alege una la întâmplare şi din ea se extrage o bilă.

a) Care este probabilitatea ca bila extrasă să fie neagră?

b) Dacă bila extrasă este neagră care este probabilitatea ca ea să provină din prima urnă?

Soluție.

a) Fie A_1, respectiv A_2 evenimentul să alegem prima, respectiv a doua urnă. Probabilitățile acestor evenimente vor fi egale: $P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$. Dacă s-a ales prima urnă, atunci probabilitatea ca din ea să extragem o bilă neagră este $P_{A_1}(A)=\frac{6}{16}$. Analog, pentru a doua urnă avem $P_{A_2}(A)=\frac{12}{18}$. Astfel, probabilitatea ca bila extrasă la întâmplare, să fie neagră este:

$$P(A)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{16}+\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{18}=\frac{25}{48}.$$

b) Dacă bila extrasă este neagră probabilitatea ca ea să provină din prima urnă este dată de formula lui Bayes:

Scanned with OKEN Scanner

$$P_A(A_1)=\frac{P(A_1)\cdot P_{A_1}(A)}{P(A_1)\cdot P_{A_1}(A)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{16}}{\frac{25}{48}}=\frac{9}{25}.$$

13. 15%, 25%, 60% din anvelopele unei întreprinderi sunt realizate de atelierele 1, 2, 3. Proporția de anvelope defecte date de cele trei ateliere este de 5%, 3%, respectiv 1%. Dacă se alege din întreaga producție de anvelope una singură şi se constată că este defectă, care este probabilitatea ca ea să provină de la atelierul al treilea?

Soluție.

Probabilitățile ca anvelopa aleasă să provină de la fiecare din cele trei ateliere vor fi:

$$P(A_1)=\frac{15}{100};\ P(A_2)=\frac{25}{100};\ P(A_3)=\frac{60}{100}.$$

Dacă anvelopa provine de la primul atelier, atunci probabilitatea ca ea să fie defectă este $P_{A_1}(A)=\frac{5}{100}$. Analog, $P_{A_2}(A)=\frac{3}{100}$, $P_{A_3}(A)=\frac{1}{100}$.

Probabilitatea ca anvelopa defectă să provină de la atelierul al treilea va fi, conform formulei lui Bayes, dată de:

$$P_A(A_3)=\frac{P(A_3)\cdot P_{A_3}(A)}{P(A_1)\cdot P_{A_1}(A)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(A)+P(A_3)\cdot P_{A_3}(A)}$$

$$P_A(A_3)=\frac{\frac{60}{100}\cdot\frac{1}{100}}{\frac{15}{100}\cdot\frac{5}{100}+\frac{25}{100}\cdot\frac{3}{100}+\frac{60}{100}\cdot\frac{1}{100}}=\frac{6}{21}.$$

14. Cantitatea de mere exportată de țara noastră este alcătuită în proporție de 20%, 30%, 50% din producțiile a trei livezi. Fiecare livadă are un rebut de 3%, 5%, 7%. Alegem un măr la

Scanned with OKEN Scanner

întâmplare. Care este probabilitatea ca el să fie bun? Dar stricat?

Soluție. Probabilitățile ca mărul ales să provină de la fiecare din cele trei livezi vor fi:

$$P(A_1)=\frac{20}{100};\ P(A_2)=\frac{30}{100};\ P(A_3)=\frac{50}{100}.$$

Dacă mărul provine de la prima livadă, atunci probabilitatea ca el să fie bun este $P_{A_1}(A)=\frac{97}{100}$. Analog, $P_{A_2}(A)=\frac{95}{100}$, $P_{A_3}(A)=\frac{93}{100}$.

Utilizăm formula probabilității totale pentru a determina probabilitatea ca mărul să fie bun, necontând de la ce livadă a fost ales:

$$P(A)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(A)+P(A_3)\cdot P_{A_3}(A)$$

$$P(A)=\frac{2}{10}\cdot\frac{97}{100}+\frac{3}{10}\cdot\frac{95}{100}+\frac{5}{10}\cdot\frac{93}{100}=0,944.$$

Probabilitatea ca mărul să fie stricat poate fi determinată cu formula probabilității complementarei:

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,944=0,056.$$

15. Testele folosite în detectarea unei boli provin de la doi producători. Primul producător are 2 utilaje care produc aceste piese şi dă un rebut de 2%, iar al doilea producător are 3 utilaje care produc aceste piese şi dă un rebut de 3%. Se alege la întâmplare un test.

a) Care este probabilitatea ca testul ales să nu indice corect prezența bolii?

b) Dacă s-a ales un test care nu indică corect prezența bolii, care este probabilitatea ca el să provină de la primul producător?

Soluție.

Scanned with OKEN Scanner

a) Fie A_1, respectiv A_2 evenimentul să obținem un test de la primul, respectiv al doilea producător.

Probabilitățile acestor evenimente vor fi: $P(A_1)=\frac{2}{5}$, respectiv $P(A_2)=\frac{3}{5}$. Dacă s-a ales primul producător, atunci probabilitatea să extragem un test defect este $P_{A_1}(A)=\frac{2}{100}$.

Analog, $P_{A_2}(A)=\frac{3}{100}$.

Astfel, probabilitatea ca testul ales la întâmplare, să fie defect este:

$$P(A)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(A)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{100}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{100}=\frac{13}{500}=0,026.$$

b) Folosim formula lui Bayes:

$$P_A(A_1)=\frac{P(A_1)\cdot P_{A_1}(A)}{P(A_1)\cdot P_{A_1}(A)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(A)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{100}}{\frac{13}{500}}=\frac{4}{13}=0,307.$$

16. Într-o urnă se găsesc 10 bile albe şi 6 bile negre. Se fac 5 extrageri succesive. Se cere probabilitatea să obținem 3 bile albe şi 2 bile negre.

Soluție. Utilizăm schema bilei nerevenite şi avem:

$$P(A)=\frac{C_{10}^3\cdot C_6^2}{C_{16}^5}=\frac{75}{182}.$$

17. Într-un depozit se află 100 de jucării de acelaşi fel, dintre care 20 au defecte remediabile şi 2 sunt rebuturi. Se iau la întâmplare 10 jucării din depozit. Care este probabilitatea ca 3 să aibă defecte remediabile, 6 să fie bune şi 1 să fie defectă? Dar probabilitatea ca toate să fie bune?

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Evident $P(A)=\dfrac{C_{20}^{3}\cdot C_{78}^{6}\cdot C_{2}^{1}}{C_{100}^{10}}$.

Probabilitatea ca toate să fie bune va fi $P(B)=\dfrac{C_{20}^{0}\cdot C_{78}^{10}\cdot C_{2}^{0}}{C_{100}^{10}}$.

18. Într-o urnă sunt 10 lozuri câştigătoare şi 30 necâştigătoare. Se extrag 30 de lozuri. Care este probabilitatea ca dintre cele 40 de lozuri extrase 5 să fie câştigătoare?

Soluție. $a=10$, $b=30$, $k=5$, $n=30$ şi aplicând formula bilei nerevenite avem:

$$P=\frac{C_{a}^{k}\cdot C_{b}^{n-k}}{C_{a=b}^{n}}=\frac{C_{10}^{5}\cdot C_{30}^{25}}{C_{40}^{30}}.$$

19. Dintre 20 de culegeri de matematică 5 sunt cu probleme de analiză matematică şi 15 sunt cu probleme de algebră. Grupăm aceste culegeri la întâmplare câte 5. Determinați probabilitatea ca fiecare grupă să conțină o culegere de analiză matematică.

Soluție. Grupându-le câte 5 obținem 4 grupe.

$$P(A)=\frac{C_{15}^{4}\cdot C_{5}^{1}}{C_{20}^{5}}\cdot\frac{C_{11}^{4}\cdot C_{4}^{1}}{C_{15}^{5}}\cdot\frac{C_{7}^{4}\cdot C_{3}^{1}}{C_{10}^{5}}.$$

20. Într-o lădiță sunt 10 mere, 10 pere şi 10 gutui. Se iau 3 fructe. Care este probabilitatea ca ele să fie diferite?

Soluție. $$P(A)=\frac{\left(C_{10}^{1}\right)^{3}}{C_{30}^{3}}.$$

21. Într-o urnă sunt 15 bile albe şi 10 bile roşii. Dacă se extrag 5 bile fără întoarcerea bilei în urnă, care este probabilitatea ca toate să fie roşii?

Soluție. $$P(A)=\frac{C_{10}^{5}}{C_{25}^{5}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

22. Se aruncă o monedă de 10 ori. Care este probabilitatea ca să apară de 3 ori stema şi de 7 ori banul?

Soluţie. Evident la o singură aruncare, probabilitatea să obţinem stema sau banul este aceeaşi şi egală cu $\frac{1}{2}$. Atunci

$$P(A)=C_{10}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}=C_{10}^{3}\frac{1}{2^{10}}.$$

23. Se aruncă un zar de 10 ori. Care este probabilitatea ca să apară de 3 ori faţa numerotată cu 2 ?

Soluţie. Probabilitatea să obţinem faţa numerotată cu 2 la aruncarea unui zar este egală cu $\frac{1}{6}$, iar probabilitatea să nu obţinem faţa numerotată cu 2 este egală cu $\frac{5}{6}$.

Obţinem:

$$P(A)=C_{10}^{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{7}=C_{10}^{3}\frac{5^{7}}{6^{10}}.$$

24. Statisticile unui spital arată că 30% dintre bolnavii care suferă de o anumită boală mor. Dacă 15 pacienţi suferă de această boală, care este probabilitatea ca 5 pacienţi să moară?

Soluţie. Probabilitatea să alegem un bolnav care să moară este de $\frac{30}{100}$, iar să alegem unul care să se însănătoşească este de $\frac{70}{100}$.

Atunci $P(A)=C_{15}^{5}\left(\frac{30}{100}\right)^{5}\left(\frac{70}{100}\right)^{10}$.

25. Se dau 3 urne având compoziţiile: 5 bile albe şi 4 negre, 6 bile albe şi 3 negre, respectiv 2 bile albe şi 7 negre. Se extrage

Scanned with OKEN Scanner

câte o bilă din fiecare urnă. Să se determine probabilitatea ca toate cele 3 bile să fie albe.

Soluție. Fie p_i probabilitatea să obținem o bilă albă din urna i. Atunci putem calcula: $p_1=\frac{5}{9}$, $p_2=\frac{6}{9}$, $p_3=\frac{2}{9}$. Utilizând probabilitatea complementarei avem: $q_1=\frac{4}{9}$, $q_2=\frac{3}{9}$, $q_3=\frac{7}{9}$. Aplicând schema lui Poisson, probabilitatea ca toate cele 3 bile să fie albe va fi dată de coeficientul lui x^3 din dezvoltarea:

$\left(\frac{5}{9}x+\frac{4}{9}\right)\left(\frac{6}{9}x+\frac{3}{9}\right)\left(\frac{2}{9}x+\frac{7}{9}\right)$, iar după calcule obținem $P=\frac{60}{729}$.

26. Se dau 4 urne având compozițiile: 5 bile albe şi 5 negre, 7 bile albe şi 3 negre, 3 bile albe şi 7 negre, respectiv 6 bile albe şi 4 negre. Se extrage câte o bilă din fiecare urnă. Să se determine probabilitatea ca 2 bile să fie albe.

Soluție. Aplicând schema lui Poisson, probabilitatea ca 2 bile să fie albe va fi dată de coeficientul lui x^2 din dezvoltarea:

$$\left(\frac{5}{10}x+\frac{5}{10}\right)\left(\frac{7}{10}x+\frac{3}{10}\right)\left(\frac{3}{10}x+\frac{7}{10}\right)\left(\frac{6}{10}x+\frac{4}{10}\right).$$

27. Pe un raft se află 3 pachete cu câte 30 biscuiți fiecare. În primul pachet 2 biscuiți sunt rupți, în al doilea 4 sunt rupți, iar în al treilea 3 biscuiți sunt rupți. Din fiecare pachet se extrage câte un biscuit.

a) Care este probabilitatea să obținem 3 biscuiți rupți?

b) Care este probabilitatea să obținem cel puțin 2 biscuiți rupți?

Soluție. Probabilitățile să extragem câte un biscut rupt din fiecare pachet sunt date de:

Scanned with OKEN Scanner

$p_1=\frac{2}{30}$, $p_2=\frac{4}{30}$, $p_3=\frac{3}{30}$. Astfel $q_1=\frac{28}{30}$, $q_2=\frac{26}{30}$, $p_3=\frac{27}{30}$.

a) Probabilitatea cerută la primul punct este reprezentată de coeficientul lui x^3 di dezvoltarea:

$$\left(\frac{2}{30}x+\frac{28}{30}\right)\left(\frac{4}{30}x+\frac{26}{30}\right)\left(\frac{3}{30}x+\frac{27}{30}\right).$$

b) A obține cel puțin 2 biscuiți rupți înseamnă că putem obține fie 2, fie 3 biscuiți rupți. Probabilitatea în acest caz este dată de suma dintre coeficientul lui x^2 şi cel al lui x^3 din dezvoltarea precedentă.

28. Un agregat are 3 componente la care pot apărea defecțiuni de funcționare cu probabilitățile de 0.03, 0.065, respctiv 0.04. Știind că agregatul funcționează dacă toate cele 3 componente ale sale funcționează, aflați probabilitatea minimă ca agregatul să funcționeze.

Soluție. Notăm cu A_i, $i=\overline{1,3}$ evenimentele să funcționeze componenta i şi utilizând inegalitatea lui Boole putem scrie:

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)\geq 1-\sum_{i=1}^{3}P(\overline{A}_i)=1-(0.03+0.065+0.04)=0.865.$$

Deci probabilitatea minimă ca agregatul sa funcționeze este de 0.865.

29. Profitul unei societăți comerciale este condiționat de îndeplinirea a 3 factori: cifra de afaceri, cota de adaos comercial şi nivelul costurilor de producție. Aceşti factori se îndeplinesc cu probabilitățile: 0.95, 0.70, 0.65. Care este probabilitatea minimă ca agentul să aibă profit?

Soluție. Notăm cu A_i, $i=\overline{1,3}$ evenimentele să se înregistreze un profit datorită cifrei de afaceri, cotei de adaos, respectiv nivelului costurilor de producție. Utilizând inegalitatea lui Boole putem scrie:

Scanned with OKEN Scanner

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \geq 1 - \sum_{i=1}^{3} P(\overline{A}_i) = 1 - (0.05 + 0.3 + 0.35) = 0.30.$$

Deci probabilitatea minimă ca societatea să înregistreze un profit este de 0.30.

30. Într-o firmă se ştie că 80% dintre angajaţi vorbesc limba franceză, 90% dintre ei au studii superioare şi 70% nu lucrează şi la o alta firmă particulară. Alegând la întâmplare un angajat al acestei firme, care este probabilitatea minimă ca acesta să fie vorbitor de limba franceză, cu studii superioare şi să nu lucreze şi la o altă firmă particulară.

Soluţie. Notăm cu A_i, $i = \overline{1,3}$ evenimentele să alegem un angajat care să fie vorbitor de limba franceză, să aibă studii superioare şi respectiv să nu lucreze şi la o altă firmă particulară. Utilizând inegalitatea lui Boole putem scrie:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \geq 1 - \sum_{i=1}^{3} P(\overline{A}_i) = 1 - (0.2 + 0.1 + 0.3) = 0.40.$$

Deci probabilitatea minimă este de 0.40.

Scanned with OKEN Scanner

7.9. Variabile aleatoare.

Definiția 7.9.1.1. *Se numeşte* ***variabilă aleatoare,*** *o mărime care în urma unei experienţe poate lua o valoare dintr-o mulțime bine definită numită mulțimea valorilor posibile.*

Exemple.

1. La aruncarea unei monede, variabila Y ia valoarea zero dacă iese „stema" şi valoarea unu dacă iese „banul", cu probabilitatea $\frac{1}{2}$, de unde putem scrie $Y:\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

2. Considerăm urna Bernoulli, cu următoarea compoziție: 2 bile albe şi 3 bile negre. Realizăm 3 extrageri şi după fiecare extragere punem bila înapoi în urnă. Fie x numărul de bile albe obținute în urma celor 3 extrageri. Atunci x poate lua orice valoare din mulțimea $\{0,1,2,3\}$. Notăm cu E_i, $i=\overline{1,4}$ evenimentele ca să obținem 0, 1, 2, respectiv 3 bile albe în urma celor trei extrageri. Atunci:

$$P(E_1)=C_3^0\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3=1\cdot 1\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3;$$

$$P(E_2)=C_3^1\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2=3\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3^2}{5^2}=\frac{2\cdot 3^3}{5^3};$$

$$P(E_3)=C_3^2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^1=3\cdot\frac{2^2}{5^2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2^2\cdot 3^3}{5^3};$$

$$P(E_4)=C_3^3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^0=\frac{2^3}{5^3}.$$

X reprezintă o variabilă aleatoare ce poate fi reprezentată sub forma unui tablou

Scanned with OKEN Scanner

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \left(\frac{2}{5}\right)^3 & \frac{2\cdot 3^3}{5^3} & \frac{2^2\cdot 3}{5^3} & \frac{2^3}{5^3} \end{pmatrix},$$

unde pe prima linie s-au notat evenimentele ce s-ar putea petrece în urma extragerilor, iar pe linia a doua s-au notat probabilitățile cu care se pot petrece aceste evenimente.

Se observă că $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 = E$ şi $E_i \cap E_j = \phi$, $\forall i \neq j$.

Observație. Aceste evenimente E_1, E_2, E_3, E_4 constituie o desfacere în evenimente incompatibile a evenimentului sigur E.

Tabloul format de cele două caracteristici poartă denumirea de **tablou de distribuție** al variabilei aleatoare X sau **repartiția** unei variabile aleatoare.

- Dacă mulțimea în care variabila aleatoare ia valori este finită sau numărabilă spunem că variabila aleatoare este **discretă** şi în acest caz distribuția ei va fi :

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

unde p_i satisface condițiile:

i) $p_i \geq 0,\ i=\overline{1,n}$;

ii) $p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Concluzionând, proprietatea i) ne spune că p_n este o probabilitate, iar proprietatea ii) ne spune că E_n constituie o desfacere în evenimente incompatibile a evenimentului total E.

- Dacă mulțimea în care variabila aleatoare ia valori este un interval de numere reale sau o reuniune finită de intervale din $\mathbf{R}$, atunci variabila se numeşte **continuă.**

Variabila aleatoare continuă va fi reprezentată de distribuția

Scanned with OKEN Scanner

$$X\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix},$$

unde $f(x)$ se numeşte **densitate de repartiţie (de probabilitate)** şi îndeplineşte condiţiile:

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$
2. $\int_a^b f(x)dx = 1$.

Definiţia 7.9.1.2. *O variabilă aleatoare X se numeşte **simplă** dacă mulţimea valorilor ei este finită.*

Notăm cu E_i mulţimea $\{e \in E / X(e) = x_i\}$; atunci evenimentele $E_1, E_2, ..., E_i$ constituie o **desfacere** a evenimentului sigur E în evenimente incompatibile.

1. $E_i \cap E_j = \phi$
2. $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$.

Observaţie. Variabilele aleatoare simple fac parte din categoria variabilelor aleatoare discrete în care mulţimea de valori este cel mult numărabilă.

Definiţia 7.9.1.3. *Fie (E,K,P) un câmp borelian de probabilitate. Fie P_n mulţimile boreliene din $\mathbf{R}^s$. Funcţia $X : E \to \mathbf{R}^s$ este o variabilă aleatoare s- **dimensională** dacă oricare ar fi A un element din $\mathbf{R}^s$ avem $X^{-1}(A) \in K$.*

Observaţii.

1. O variabilă aleatoare s- dimensională se mai numeşte **vector aleatoriu.**
2. Dacă X este o variabilă aleatoare s- dimensională înseamnă că ea are forma $X = (x_1, ..., x_s)$.

Teorema 7.9.1.1. *Un vector $X : E \to \mathbf{R}^s$ este o variabilă aleatoare s- dimensională dacă şi numai dacă fiecare componentă a sa este variabilă aleatoare.*

Scanned with OKEN Scanner

Fie $F=\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ o familie de variabile aleatoare, $X_i: E\to \mathbf{R}$.

Definiția 7.9.1.4. *Spunem că familia F de variabile aleatoare este o familie de variabile aleatoare* ***independente în sensul Steinhaus– Kac*** (S,K) *dacă orice familie finită de indici $J\subset I$ şi pentru* $\forall (A_i)_{i\in J}\in B^s$ *are loc relația:* $P\left(\bigcap_{i\in J} X_i^{-1}(A_i)\right)=\prod_{i\in J}\left(P\left(X_i^{-1}(A_i)\right)\right)$.

7.9.2. Operații cu variabile aleatoare

Teorema 7.9.2.1. *Dacă X, Y sunt două variabile aleatoare, iar* $a\in\mathbf{R}$ *atunci:*

1. $a\cdot X$ *este o variabilă aleatoare;*
2. $X+Y$ *este o variabilă aleatoare;*

rezultă că mulțimea variabilelor aleatoare este un spațiu liniar.

3. X^2 *este o variabilă aleatoare;*
4. $\frac{1}{X}, X>0$ *este o variabilă aleatoare;*
5. $\frac{X}{Y}$ *este o variabilă aleatoare;*
6. $|X|$ *este o variabilă aleatoare;*
7. $\sup(X,Y)$ *este o variabilă aleatoare;*
8. $\inf(X,Y)$ *variabilă aleatoare.*

Concluzie. Cu variabilele aleatoare astfel definite putem efectua diferite operații.

a) Adunarea cu o constantă

- Fie X o variabila aleatoare discretă: $\forall a\in R$,

$$X+a:\begin{pmatrix} x_i+a \\ p_i \end{pmatrix};\ i=\overline{1,n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

- Fie X o variabila aleatoare continuă: $\forall a \in R$,

$$X+a:\begin{pmatrix} x_i+a \\ f(x) \end{pmatrix};\ i=\overline{1,n}.$$

b) Înmulțirea cu o constantă

- Fie X o variabila aleatoare discretă: $\forall a \in R$,

$$X\cdot a:\begin{pmatrix} x_i\cdot a \\ p_i \end{pmatrix};\ i=\overline{1,n}.$$

- Fie X o variabila aleatoare continuă: $\forall a \in R$,

$$X\cdot a:\begin{pmatrix} x_i\cdot a \\ f(x) \end{pmatrix};\ i=\overline{1,n}.$$

c) Adunarea variabilelor

- Fie X şi Y două variabile aleatoare discrete având distribuțiile $X:\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}$, respectiv $Y:\begin{pmatrix} y_j \\ p_j \end{pmatrix}$.

Numim **suma** variabilelor aleatoare X şi Y o nouă variabilă notată $X+Y$ a cărei distribuție este: $X+Y:\begin{pmatrix} x_i+y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}$, $i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}$ unde p_{ij} reprezintă probabilitatea ca $X=x_i$ şi $Y=y_j$.

Observație. În mod analog putem introduce suma pentru mai multe variabile aleatoare (număr infinit) şi produsul unor variabile aleatoare (număr infinit).

Fie E_i evenimentul ca X să ia valoarea x_i şi F_j, evenimentul ca Y să ia valoarea y_j. Dacă E_i şi F_j sunt independente, atunci $p_{ij}=P(E_i)\cdot P(F_j)=p_i\cdot q_j$. În acest caz vom avea $X+Y:\begin{pmatrix} x_i+y_j \\ p_i\cdot q_j \end{pmatrix}$ şi $X\cdot Y:\begin{pmatrix} x_i\cdot y_j \\ p_i\cdot q_j \end{pmatrix}$, unde $i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}$.

Scanned with OKEN Scanner

• Fie X şi Y două variabile aleatoare continue $X:\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ $x\in[a_1,b_1]$, respectiv $Y\begin{pmatrix} y \\ f(y) \end{pmatrix}, y\in[a_2,b_2]$. Numim **suma** variabilelor aleatoare X şi Y o nouă variabilă notată $X+Y$ a cărei distribuţie este:

$$X+Y\begin{pmatrix} x+y \\ \gamma(x,y) \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}1.\gamma(x,y)\geq 0,\forall x\in[a_1,b_1],y\in[a_2,b_2]\\ 2.\iint\limits_D\gamma(x,y)\,dxdy, D:[a_1,b_1]\times[a_2,b_2].\end{cases}$$

Dacă evenimentele sunt independente: $\gamma(x,y)=f(x)\cdot g(y)$ deci $\iint\limits_D f(x)g(y)\,dxdy$.

d) Produsul variabilelor

Fie X şi Y două variabile aleatoare având distribuţiile $X:\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}$, respectiv $Y:\begin{pmatrix} y_j \\ p_j \end{pmatrix}$. Numim produsul variabilelor aleatoare X şi Y o nouă variabilă notată $X\cdot Y$ a cărei distribuţie este:

$$X\cdot Y:\begin{pmatrix} x_i\cdot y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix},\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}$$

unde p_{ij} reprezintă probabilitatea ca $X=x_i$ şi $Y=y_j$.

e) Puterea unei variabile aleatoare

Fie X o variabilă aleatoare discretă având distribuţia $X:\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}$ şi $m\in\mathbf{N}$. Numim puterea m a variabilei aleatoare X o nouă variabilă notată X^m a cărei distribuţie este $X^m:\begin{pmatrix} x_i^m \\ p_i \end{pmatrix}$, $i=\overline{1,n}$.

Scanned with OKEN Scanner

7.9.3. Funcția de repartiție. Funcția caracteristică

Fie (E,K,P) un câmp borelian de probabilitate şi X o variabilă aleatoare, $X:E\to\mathbf{R}$.

Definiția 7.9.3.1. *Funcţia* $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$ *se numeşte* ***funcție de repartiție*** *a variabilei aleatoare* X *dacă*

$$F(X)=P(X<x)=P\left(\{e\in E/X(e)<x\}\right).$$

Observație. Dacă variabila aleatoare X este discretă atunci

$$F(x)=P(X<x)=\sum_{x_i<x}P(X=x_i),$$

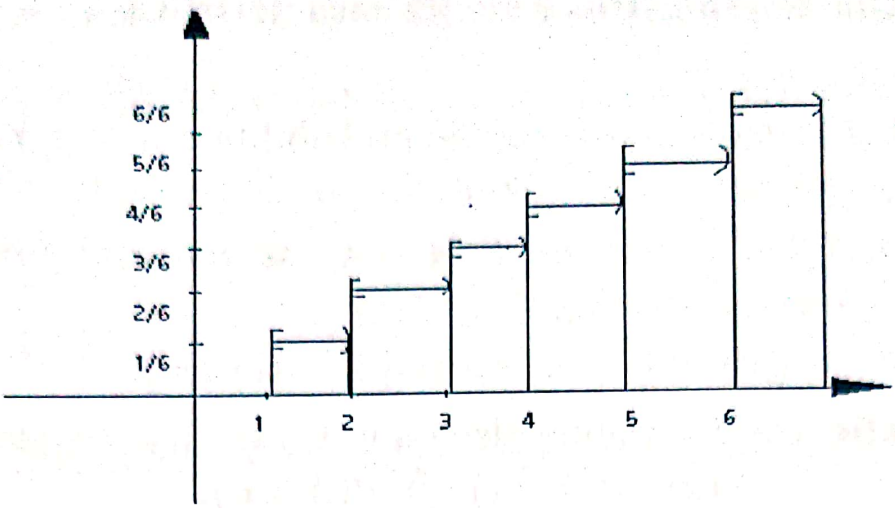
adică $F(x)$ este suma probabilităților valorilor lui X mai mici decât x.

Exemplu. Considerăm variabila aleatoare X egală cu numărul de puncte obținute la aruncarea unui zar:

$$X:\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\ \frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

Ne interesează funcția de repartiție şi graficul ei: $F(x)=\begin{cases}0, x<1\\ \frac{1}{6}, 1\le x<2\\ \frac{2}{6}, 2\le x<3\\ \frac{3}{6}, 3\le x<4\\ \frac{4}{6}, 4\le x<5\\ \frac{5}{6}, 5\le x\le 6\\ 1, x>6\end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner



Proprietăți.

1. $0 \le F(x) \le 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$
2. $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$; $F(x_1) < F(x_2)$.
3. $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$; avem $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.
4. $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$; avem
$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) - P(X = x_1).$$
5. $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$; avem
$$P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) - P(X = x_1) + P(X = x_2).$$
6. $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$; avem
$$P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) + P(X = x_2).$$
7. $F(x) = F(x-0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} F(x)$ funcția continuă la stânga în $x \in \mathbf{R}$.
8. $F(-\infty) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.
9. $F(+\infty) = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Concluzie. O funcție de repartiție este o funcție crescătoare, continuă la stânga, cu limita la $-\infty$ egală cu 0, şi cu limita la $+\infty$ egală cu 1.

Este adevărată şi reciproca: dacă o funcție F verifică proprietățile 1.- 9. atunci F este funcție de repartiție.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrația acestor proprietăți este imediată:

Proprietatea 1. rezultă din faptul că F este o probabilitate.

În cazul celei de-a doua proprietăți știm că $F(x_1)=P(X<x_1)$ și că $F(x_2)=P(X<x_2)$.

Dar

$$\left.\begin{array}{c}(X<x_2)=(X<x_1)\cup(x_1\le X<x_2)\\(X<x_1)\cap(x_1\le X<x_2)=\phi\end{array}\right\},$$

de unde

$$P(X<x_2)=P(X<x_1)+P(x_1\le X<x_2) \text{ și}$$

$$F(x_2)=F(x_1)+P(x_1\le X\le x_2)\Rightarrow F(x_2)\ge F(x_1).$$

A treia proprietate rezultă imediat din proprietatea anterioară.

În cazul celei de-a patra: din faptul că $x_1\le X<x_2=(x_1<X<x_2)\cup(X=x_1)$ și știind că $(x_1<X\le x_2)\cap(X=x_1)=\phi$ rezultă că

$$P(x_1\le X<x_2)=P(x_1<X<x_2)+P(X=x_1).$$

Dar $P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)$ și astfel obținem

$$P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)-P(X=x_1).$$

Proprietatea 5: Știm că $x_1<X\le x_2=(x_1<X<x_2)\cup(X=x_2)$ și

$$(x_1<X<x_2)\cap(X=x_2)=\phi$$

atunci rezultă $P(x_1<X\le x_2)=P(x_1<X<x_2)+P(X=x_2)$. Ținând cont de proprietatea 4. obținem:

$$P(x_1<X\le x_2)=F(x_2)-F(x_1)-P(X=x_1)+P(X=x_2).$$

■

Definiția 7.9.3.2. *Fie X o variabilă aleatoare discretă. Atunci* ***funcția caracteristică*** *a variabilei aleatoare X este $f_c(t)=\sum_{i=1}^{\infty}p_i\cdot e^{itx_i}$, unde t este un parametru real.*

Scanned with OKEN Scanner

7.9.4. Densitate de repartiție

Definiția 7.9.4.1. *Dacă există o funcție* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$ *care satisface condițiile:*

1. $f(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbf{R}$;
2. f *este integrabilă pe orice interval mărginit;*
3. *există* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *astfel încât* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

atunci spunem că funcția f *este* ***densitatea de repartiție (probabilitate)*** *a variabilei aleatoare continue* X.

Exemplu.

Fie $f(x)=\dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}, x\in\mathbf{R}$. Să se verifice dacă f este o densitate de probabilitate.

Soluție. Conform definiției trebuie să verificăm condițiile:

a) $f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbf{R}$ este evident adevărată;

b) Calculăm integrala:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{2}{\pi}\lim_{A\to\infty}\int_0^{A}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{2}{\pi}\lim_{A\to\infty} arctg\,x\Big|_0^A=$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{A\to\infty}(arctgA)=\frac{2}{\pi}\cdot arctg(+\infty)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1.$$

Din a) și b) rezultă ca f este o densitate de probabilitate.

Definiția 7.9.4.2. *Fie* X *o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de probabilitate* $f(x)$. *Atunci* ***funcția de repartiție*** *este*

$$F(X)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Putem să enunțăm două proprietăți:

1. $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\ \lim_{x\to+\infty}F(+\infty)=1$;
2. $F(x)\in[0,1],\ \forall x\in(-\infty,+\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că dacă există densitatea de probabilitate $f(x)$, atunci F este derivabilă şi $F'(x)=f(x)$, iar probabilitatea ca variabila aleatoare X să ia valori cuprinse între a şi b cu $a<b$ va fi dată de

$$F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt.$$

Definiția 7.9.4.3. *Fie X o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de probabilitate $f(x)$. Atunci* ***funcția caracteristică*** *a variabilei X este $f_c(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx$, unde t este un parametru real.*

7.9.5. Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare discrete.

Considerăm o variabilă aleatoare discretă având distribuția

$$X:\begin{pmatrix} x_i \\ f(x_i) \end{pmatrix}; i=\overline{1,n}.$$

Ştim că $f(x_i)$ satisface condițiile:

$$\begin{cases} f(x_i)\geq 0, \forall i=\overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{n} f(x_i)=1 \end{cases}.$$

7.9.5.1.Valoare medie

Definiția 5.1. *Numim* ***valoare medie*** *a variabilei aleatoare X notată cu m sau $M(X)$ suma $\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$.*

Scanned with OKEN Scanner

Proprietăți ale valorii medii

P_1) Valoarea medie este o valoare internă adică dacă $\alpha \le x_i \le \beta$ atunci avem şi $\alpha \le M(X) \le \beta$.

Demonstrație. Relației $\alpha \le x_i \le \beta$ îi aplicăm funcția f şi obținem $\alpha f(x_i) \le x_i f(x_i) \le \beta f(x_i)$, relație pe care o însumăm de la $i=1$ la n şi obținem:

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \le \beta \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Leftrightarrow \alpha \le M(X) \le \beta$$

unde am ținut cont de faptul că $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$.

P_2) Valoarea medie a unei constante c este egală cu constantă $M(c) = c$.

Demonstrație. Pentru un tablou de forma $c : \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$, conform formulei valorii medii, obținem $M(c) = c \cdot 1 = c$.

P_3) Valoarea medie a unei constante înmulțită cu variabila aleatoare X este egală cu constanta înmulțită cu valoarea medie, adică $M(cX) = cM(X)$.

Demonstrație. Fie variabila aleatoare dată de $cX : \begin{pmatrix} cx_i \\ f(x_i) \end{pmatrix}$.

Atunci avem:

$$M(cX) = \sum_{i=1}^{n} cx_i f(x_i) \Rightarrow M(cX) = c \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = cM(X)$$

P_4) Dacă avem două variabilele aleatoare reprezentate prin tablourile: $X : \begin{pmatrix} x_i \\ f(x_i) \end{pmatrix}$, respectiv $Y : \begin{pmatrix} y_i \\ g(y_i) \end{pmatrix}$ atunci

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

Observație. P4 se poate generaliza : $M\left(\sum_{p=1}^{n} X_p\right) = \sum_{p=1}^{n} M(X_p)$.

Scanned with OKEN Scanner

P$_5$) Dacă X şi Y sunt două variabile aleatoare sunt independente atunci $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

7.9.5.2.Abatere

Definiția 5.2. *Numim* ***abatere*** *a variabilei aleatoare discrete* X *o nouă variabilă aleatoare dată de*

$$\xi = X - M(X) : \begin{pmatrix} x_i - M(X) \\ f(x_i) \end{pmatrix}.$$

Proprietate. *Valoarea medie a abaterii este egală cu zero.*
Demonstrație.

$$M(\xi) = M\left[X - M(X)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[x_i - M(X)\right] \cdot f(x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} M(X) \cdot f(x_i) =$$

$$= M(X) - M(X) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}_{=1} = M(X) - M(X) = 0.$$

7.9.5.3. Moment de ordin r.

Definiția 5.3. *Numim* ***moment de ordin*** r, *notat* M_r, *valoarea medie a variabilei aleatoare* X^r, *adică* $M_r = M\left(X^r\right)$.

Proprietăți.
P$_1$) Dacă $r_1 \le r_2$ atunci $M_{r_1} \le M_{r_2}$.

Demonstrație.
Avem

$$r_1 \le r_2 \Leftrightarrow x_i^{r_1} \le x_i^{r_2} \, (\forall x_i > 1).$$

Aplicăm funcția $f(x_i)$ şi obținem $x_i^{r_1} f(x_i) \le x_i^{r_2} f(x_i)$, relație pe care o însumăm de la $i = 1$ la n:

Scanned with OKEN Scanner

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^{r_1} f(x_i)}_{M_{r_1}} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^{r_2} f(x_i)}_{M_{r_2}} \Rightarrow M_{r_1} \le M_{r_2}.$$

P_2) Fiind date variabilele aleatoare $X_1, X_2, ..., X_k$ independente în totalitatea lor, cu $M(X_i) = 0$ atunci are loc relația

$$M(X_1 + X_2 + ... + X_k)^2 = M(X_1^2) + M(X_2^2) + ... + M(X_k^2).$$

Demonstrație.

$$M(X_1 + X_2 + ... + X_K)^2 = M(X_1^2 + X_2^2 + ... + X_k^2 + 2X_1X_2 + ... + 2X_{k-1}X_k) =$$

$$M(X_1^2) + M(X_2^2) + ... + M(X_k^2) + 2\left(\underbrace{M(X_1)M(X_2) + ... + M(X_{k-1})M(X_k)}_{0}\right) =$$

$$= M(X_1^2) + M(X_2^2) + ... + M(X_k^2)$$

P_3) Momentul de ordin r al variabilei aleatoare CX este

$$M_r(CX) = C^r M_r(X).$$

Demonstrație. $M_r(CX) = M(C^r X^r) = C^r M(X^r) = C^r M_r(X)$.

7.9.5.4. Valoare medie de ordin r

Definiția 5.4. *Numim* ***valoare medie de ordin*** r, *notat cu* m_r, *radicalul de ordin* r *din momentul de ordinul* r *al variabilei aleatoare:*

$$m_r = \sqrt[r]{M_r(X)} = \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n} x_i^r f(x_i)}$$

7.9.5.5. Moment centrat de ordin r

Definiția 5.5. *Numim* ***moment centrat de ordin*** r *al variabilei aleatoare* X *momentul de ordin* r *al abaterii; notăm* $\mu_r = M(\xi^r)$.

Scanned with OKEN Scanner

Dintre momentele centrate de ordin r, ne interesează momentul centrat de ordin 2 numit şi **dispersia** variabilei aleatoare X.

Dispersia va fi

$$D(X)=\sigma^2=M\left(\xi^2\right)=M\left((X-m)^2\right)$$

şi calculând:

$$M\left(X^2-2mX+m^2\right)=M\left(X^2\right)-2mM(X)+m^2=M\left(X^2\right)-m^2$$

obţinem:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2.$$

Exemplu. Fie variabila aleatoare $X:\begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k} \end{pmatrix}$.

Ştim că $M(X)=n\cdot p$, $M\left(X^2\right)=n\cdot p(np+q)$, şi astfel vom obţine prin înlocuire:

$$D(X)=n\cdot p(np+q)-(np)^2 npq.$$

Proprietăţi.

P$_1$) Dispersia constantei este egală cu 0.

Demonstraţie. Fie $C:\begin{pmatrix} C \\ 1 \end{pmatrix}$ atunci

$$D(C)=M\left(C^2\right)-\left[M(C)\right]^2\Rightarrow D(C)=C^2-C^2=0.$$

P$_2$) $D(c+X)=D(X)$.

Demonstraţie.

$$D(c+X)=M\left((c+X)^2\right)-\left[M(c+X)\right]^2=M\left(c^2+2cX+X^2\right)-\left[M(c+X)\right]^2=$$

$$=c^2+2cM(X)+M\left(X^2\right)-\left[c+M(X)\right]^2=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2=D(X)$$

P$_3$) $D(cX)=c^2D(X)$.

Demonstraţie.

$$D(cX)=M\left((cX)^2\right)-\left[M(cX)\right]^2=M\left(c^2X^2\right)-\left[M(cX)\right]^2=$$

$$=c^2M\left(X^2\right)-c^2\left[M(X)\right]^2=c^2\left\{M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2\right\}=c^2D(X)$$

Scanned with OKEN Scanner

P4) Dacă variabilele aleatoare X şi Y sunt independente atunci dispersia sumei este egală cu suma dispersiilor.

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

P5) Dacă variabilele aleatoare $X_1, X_2,...,X_k$ sunt independente, având fiecare aceeaşi dispersie $D(X)$ atunci:

$$D\left(\frac{X_1+X_2+...+X_k}{k}\right)=\frac{D(X)}{k}.$$

7.9.5.6.Abatere medie pătratică

Definiția 5.6. *Numim* ***abatere medie pătratică*** *a unei variabile aleatoare X radicalul dispersiei. Abaterea medie pătratică se notează cu* $\sigma=\sqrt{D(X)}=\sqrt{M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2}$.

7.9.5.7. Valoare mediană

Definiția 5.7. *Prin* ***valoare mediană*** *notată M_e înțelegem acea valoare pentru care*

$$P(X<M_e)=P(X>M_e).$$

Observație. Se poate ca valoarea mediană să fie nu un singur număr ci un interval de numere reale.

7.9.5.8. Valoare dominantă

Definiția 5.8. *Se numeşte* ***valoare dominantă*** *a variabilei aleatoare X acea valoare a variabilei aleatoare pentru care probabilitatea de a se realiza este maximă. Se mai numeşte şi* ***mod.***

Se notează cu M_o.

Scanned with OKEN Scanner

7.9.6. Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare continue

Considerăm o variabilă aleatoare continuă având distribuția $X:\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ unde $f(x)$ satisface condițiile: $f(x)\geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$ şi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

7.9.6.1. Valoare medie

Definiția 6.1. *Numim* ***valoare medie*** *a variabilei aleatoare continue X integrala*

$$M(X) = \overline{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Proprietăți.

P$_1$) Dacă $X = a$ atunci valoarea medie este $M(X) = a$.

Demonstrație. $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} af(x)dx = a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a\cdot 1 = a$ ținând cont de a doua proprietate a funcției $f(x)$.

P$_2$) Dacă variabila aleatoare X este mărginită, adică $a \leq x \leq b$, atunci valoare medie este şi ea mărginită:

$$a \leq M(X) \leq b.$$

Demonstrație. Plecăm de la relația $a \leq X \leq b$ căreia îi aplicăm funcția $f(x)$ şi o integrăm obținând:

$$a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \leq b\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Astfel putem scrie $a \leq M(X) \leq b$.

P$_3$) $M(\alpha X) = \alpha \cdot M(X)$.

Scanned with OKEN Scanner

P4) $M(\alpha X+\beta)=\alpha M(X)+\beta$.

P5) Dacă X şi Y sunt două variabile aleatoare continue, atunci $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$.

Observaţie. Proprietatea se poate generaliza:

$$M(X_1+X_2+...+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n).$$

P6) Dacă X şi Y sunt două variabile aleatoare independente atunci

$$M(XY)=M(X)\cdot M(Y).$$

7.9.6.2. Moment de ordin r.

Definiţia 6.2. *Numim* ***moment de ordin*** r *valoarea medie a variabilei aleatoare* X^r, *adică*

$$M_r(X)=M(X^r)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^r f(x).$$

7.9.6.3. Moment centrat de ordin r

Definiţia 6.3. *Numim* ***moment de ordin*** r *al variabilei aleatoare* X *momentul de ordin* r *al abaterii şi se notează cu*

$$\mu_r=M(\xi^r)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2 f(x)dx.$$

Momentul centrat de ordin 2 se numeşte **dispersie** şi va fi dată de:

$$D(X)=\sigma^2=M(\xi^2)=M(x-m)^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 f(x)dx.$$

7.9.6.4. Abaterea medie pătratică

Definiţia 6.4. *Numim* ***abatere medie pătratică*** *a unei variabile aleatoare* X *radicalul dispersiei şi se notează cu*

$$\sigma=\sqrt{D(X)}=\sqrt{M(X^2)-[M(X)]^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Spunem că variabila aleatoare X are o **distribuție uniformă** pe intervalul $[a,b]$ dacă are densitatea de probabilitate:

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbf{R}\setminus[a,b]\\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\end{cases}.$$

Funcția de repartiție este

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 1, & x>b\end{cases}.$$

Momentul de ordinul r este

$$M_r(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^r f(x)dx=\int_a^b x^r\frac{1}{b-a}dx=$$

$$=\frac{1}{(b-a)(r+1)}(b^{r+1}-a^{r+1}).$$

Atunci

$$m=M_1(X)=\frac{a+b}{2}$$

iar dispersia :

$$D^2(X)=M_2(X)-[M(X)]^2=$$

$$=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Rezultă că abaterea medie pătratică va fi:

$$\sigma=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom prezenta în continuare ca aplicaţii două inegalităţi cunoscute:

Inegalitatea lui Kolmogorov. *Considerăm* X *o variabilă aleatoare cu distribuţia* $X:\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$, *când* x *parcurge intervalul* $[a,b]$. *Atunci* $\forall \alpha > 0$ *are loc inegalitatea*

$$P(|X| \geq \alpha) \geq \frac{M_2(X) - \alpha^2}{M^2}$$

numită şi inegalitatea lui Kolmogorov, unde $M_2(X) = M(X^2)$.

Demonstraţie.

Ştim că $M_2(X) = M(X^2) = \int_a^b x^2 f(x)\,dx = \int_{A_1} x^2 f(x)dx + \int x^2 f(x)\,dx$ unde $A_1 = \{|x| \geq \alpha\}$ şi $A_2 = \{|x| < \alpha\}$.

$$M_2(X) \leq \alpha^2 \int_{A_2} f(x)\,dx + \beta^2 \int_{A_1} f(x)\,dx \leq \alpha^2 + \beta^2 \cdot P(|x| \geq \alpha) \Rightarrow .$$

$$\Rightarrow P(|x| \geq \alpha) \geq \frac{M_2(X) - \alpha^2}{M^2},$$

ceea ce încheie demonstraţia.

Inegalitatea lui Leapunov. *Notăm cu* m *media* $M(|X-a|^s)$. *Atunci are loc inegalitatea*

$$\sqrt[s]{m_s} \leq \sqrt[s+1]{m_{s+1}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

7.10. Aplicații

1. Se aruncă 2 zaruri. Se acordă 10 puncte dacă suma punctelor este 2 sau 12; 5 puncte dacă suma este 7 şi 1 punct în celelalte cazuri. Scrieți distribuția numărului de puncte acordate celui ce aruncă zarul.

Soluție. La aruncare a două zaruri putem obține suma 2 doar din combinația $(1,1)$ şi suma 12 din combinația $(6,6)$. Deci probabilitatea să obținem suma 2 sau 12 este $p_1=\frac{2}{36}$. Suma 7 se obține cu probabilitatea $p_2=\frac{6}{36}$. Pentru restul situațiilor probabilitatea va fi dată de $p_3=\frac{28}{36}$. Astfel distribuția numărului de puncte obținute de cel ce aruncă zarul este:

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ \frac{2}{36} & \frac{6}{36} & \frac{28}{36} \end{pmatrix},$$

unde pe prima limie avem evenimentele ce se pot petrece, respectiv numărul de puncte acordate. Evident $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$.

2. La un examen o grupă de 20 studenți au obținut notele: 8 dintre ei au obținut nota 5, 3 studenți au obținut nota 7, 5 studenți au obținut nota 8 şi 4 studenți au obținut nota 10. Scrieți distribuția notelor şi calculați media şi dispersia.

Soluție. Distribuția va fi

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 & 10 \\ \frac{8}{20} & \frac{3}{20} & \frac{5}{20} & \frac{4}{20} \end{pmatrix},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde se observă că suma elementelor de pe linia a doua este egală cu 1. Media este dată de:

$$M(X)=5\cdot\frac{8}{20}+7\cdot\frac{3}{20}+8\cdot\frac{5}{20}+10\cdot\frac{4}{20}=7,05,$$

iar disprsia o vom calcula cu formula $D(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M(X)\right)^2\cdot p_i$ şi obţinem:

$$D(X)=(-2,05)^2\cdot\frac{8}{20}+(-0,05)^2\cdot\frac{3}{20}+(0,95)^2\cdot\frac{5}{20}+(2,95)^2\cdot\frac{4}{20}=3,64.$$

3. Într-o urnă sunt 5 bile albe şi 5 bile negre. Efectuăm 2 extrageri a câte o bilă, punând de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă. Atunci numărul de apariţii de bile albe este o variabilă aleatoare. Să se determine distribuţia acestei variabile aleatoare.

Soluţie. Problema se încadrează în schema lui Bermoulli, în care probabilitatea să extragem o bilă albă este $p=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$, iar probabilitatea să extragem o bilă neagră este $q=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$. Distribuţia va fi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ C_2^0\left(\frac{2}{3}\right)^2 & C_2^1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) & C_2^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

4. Să se determine $p\in\mathbf{R}$ astfel încât următorul tablou $X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,15 & 0,3 & 0,3 & p \end{pmatrix}$ să reprezinte o variabilă aleatoare discretă. Calculaţi apoi media şi dispersia.

Soluţie. Trebuie ca $\sum_{i=1}^{4}p_i=0,15+0,3+0,3+p=1$, de unde rezultă că $p=0,25$. Evident $p_i\geq 0$, $i=\overline{1,4}$.

Scanned with OKEN Scanner

5. Să se determine variabila aleatoare $X:\begin{pmatrix} a & 2a & 3a \\ p & 2p & 4p \end{pmatrix}$ știind că $M\left(7X^2\right)=180$, $a\in\mathbf{Z}$ şi $p\in\mathrm{R}$.

Soluție. Din condiția ca X să reprezinte o variabilă aleatoare discretă, obținem $p\geq 0$ şi $p++2p+4p=1$, de unde $p=\frac{1}{7}$. Astfel distribuția lui X devine: $\begin{pmatrix} a & 2a & 3a \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$.

$M\left(7X^2\right)=7M\left(X^2\right)=7\cdot\left(\frac{a^2}{7}+\frac{8a^2}{7}+\frac{36a^2}{7}\right)=45a^2=180$, de unde $a=\pm 2$.

Deci variabila X poate avea una din distribuțiile:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \text{ sau } \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

6. Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare independente şi identic repartizate cu distribuția $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$ să se determine X^2, $X+Y$, precum şi $M(X+Y)$.

Soluție. Este evident că $X^2:\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$, distribuție pe care o putem scrie restrâns $X^2:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$

deoarece $P\left(X^2=1\right)=P\left[(X=1)\cup(X=-1)\right]=\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{6}{7}$.

Scanned with OKEN Scanner

$$X+Y:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{4}{49} & \frac{2}{49} & \frac{8}{49} & \frac{2}{49} & \frac{1}{49} & \frac{4}{49} & \frac{8}{49} & \frac{4}{49} & \frac{16}{49} \end{pmatrix}, \text{ adică}$$

$$X+Y:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{4}{49} & \frac{4}{49} & \frac{17}{49} & \frac{8}{49} & \frac{16}{49} \end{pmatrix}.$$

$$M(X+Y)=\sum_{i=1}^{5} x_i p_i = -\frac{8}{49}-\frac{4}{49}+0+\frac{8}{49}+\frac{32}{49}=\frac{28}{49}.$$

7. Fie variabila aleatoare discretă $X:\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$.

a) Scrieți tablourile de distribuție pentru X^2, X^3, $2X$.
b) Calculați media, momentul de ordin 2 şi dispersia pentru variabila aleatoare X.

Soluție.

a) $X^2:\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$ distribuție pe care o putem scrie restrâns

$$X^2:\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix};\ X^3:\begin{pmatrix} -8 & 0 & 8 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix};\ 2X:\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

b) $M(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i p_i = -1+0+0,4=-0,6;$

$M_2 = M(X^2)=0+2,8=2,8;$

$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=2,8-(-0,6)^2=2,44.$

8. Fie variabila aleatoare discretă $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$. Calculați momentul centrat de ordin 3.

Soluție. Reamintim formula momentului centrat de ordin 3: $\mu_3 = M\left((X-m)^3\right)$, unde m reprezintă media variabilei aleatoare X.

Scanned with OKEN Scanner

Mai întâi calculăm media: $m = M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{6}{9} = \frac{5}{3}$.

Astfel avem:

$$X - m : \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \text{ şi } (X-m)^3 : \begin{pmatrix} -\frac{125}{27} & -\frac{8}{27} & \frac{1}{27} & \frac{64}{27} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix},$$

iar în continuare avem: $\mu_3 = M\left((X-m)^3\right) = -\frac{125}{3^5} - \frac{8}{3^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{128}{3^5} = -\frac{2}{3^3}$.

9. Se consideră variabila aleatoare $X : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$, $p_1, p_2, p_3 \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine p_1, p_2, p_3 astfel încât variabila X să aibă media egală cu 0 şi momentul de ordin 2 egal cu $\frac{8}{5}$.

b) Să se scrie funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X.

c) Să se determine distribuţia variabilei $X+2$ şi să se calculeze media ei.

Soluţie.

a) Impunem condiţiile: $p_1, p_2, p_3 \geq 0$ şi $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Mai mult, din ipoteze avem

$$M(X) = -2p_1 + 0 + 2p_3 = 0,$$

de unde obţinem $p_1 = p_3$

şi

$$M(X^2) = 4p_1 + 0 + 4p_3 = \frac{8}{5},$$

de unde rezultă că $p_1 = \frac{1}{5} = p_3$.

Deci p_2 va fi: $p_2 = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$. Tabloul de distribuţie obţinut are forma:

Scanned with OKEN Scanner

$$X:\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

b) $F(X)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,-2]\\ \frac{1}{5}, & x\in(-2,0]\\ \frac{4}{5}, & x\in(0,2]\\ 1, & x\in(2,+\infty]\end{cases}$.

c) $X+2:\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$ şi $M(X+2)=0+\frac{6}{5}+\frac{4}{5}=2$.

10. Se dau variabilele independente $X:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12}\end{pmatrix}$ şi $Y:\begin{pmatrix}1 & 2\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$. Se cer $X+Y$, XY.

Soluţie.

$$X+Y:\begin{pmatrix}0+1 & 0+2 & 1+1 & 1+2 & 2+1 & 2+2 & 3+1 & 3+2\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} & \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} & \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3} & \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3} & \frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

care mai poate fi scris restrâns sub forma:

$$X+Y:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{2}{9} & \frac{5}{36} & \frac{1}{18}\end{pmatrix}.$$

Procedând similar pentru înmulţire obţinem:

Scanned with OKEN Scanner

$$XY:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{2}{9} & \frac{1}{36} & \frac{1}{9} & \frac{2}{36}\end{pmatrix}.$$

11. Fie o urnă cu 4 bile albe şi 3 bile negre. Se extrag simultan 3 bile. Fie X variabila aleatoare ce indică numărul de bile albe obţinute în urma extragerii. Să se determine:

a) repartiţia variabilei aleatoare;

b) probabilitatea ca cel puţin 2 dintre bilele extrase să fie albe.

Soluţie.

a) În urma extragerilor putem obţine 0,1,2 sau 3 bile albe, deci valorile posibile ale variabilei aleatoare X sunt 0,1,2 sau 3. Ne interesează şi probabilităţile cu care v.a. X ia aceste valori. Pentru calcularea lor aplicăm schema bilei nerevenite:

$$P(X=0)=\frac{C_4^0C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35};\ P(X=1)=\frac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35};$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35};\ P(X=3)=\frac{C_4^3C_3^0}{C_7^3}=\frac{4}{35}.$$

Prin urmare , repartiţia v. a. X este: $X:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{1}{35} & \frac{12}{35} & \frac{18}{35} & \frac{4}{35}\end{pmatrix}$

b) Probabilitatea ca cel puţin 2 bile extrase să fie albe va fi:

$$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{18}{35}+\frac{4}{35}=\frac{22}{35}.$$

12. Fie o urnă cu 40 bile albe şi 80 bile negre. Din urnă se fac 3 extrageri cu întoarcerea bilei în urnă. Fie variabila aleatoare care indică numărul bilelor albe obţinute în cele 3 extrageri. Să se determine:

a) repartiţia variabilei aleatoare X;

Scanned with OKEN Scanner

b) probabilitățile $P(X=2)$; $P\left(X<\frac{\pi}{3}\right)$; $P(X\le 2/X>0,2)$;

c) $F\left(\frac{5}{2}\right)$ unde F este funcția de repartiție a variabilei aleatoare X;

d) funcția de repartiție a variabilei aleatoare X;

e) media, dispersia și abaterea medie pătratică a variabilei aleatoare X;

f) $P\left(\left|X-M(x)\right|<\sigma(x)\right)$;

g) momentul centrat de ordinul 3 al variabilei aleatoare X;

h) modul variabilei aleatoare X.

Soluție.

a) Variabila aleatoare poate lua valorile $0,1,2$ sau 3 bile albe. Ne interesează și valorile probabilităților ca variabila aleatoare X să ia aceste valori. Pentru calcuareal lor aplicăm schema bilei revenite, unde $n=3$, iar probabilitățile să extragem o bilă albă, respectiv una neagră sunt $p=\frac{40}{120}=\frac{1}{3}$ și $q=\frac{80}{120}=\frac{2}{3}$. Astfel:

$$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27};\quad P(X=1)=C_3^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9};$$

$$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9};\quad P(X=3)=C_3^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{27}.$$

Deci tabloul de repartiție al lui X este $X:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{8}{27} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{27}\end{pmatrix}$.

b) $P(X=2)=\frac{2}{9}$; $P\left(X<\frac{\pi}{3}\right)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{8}{27}+\frac{4}{9}=\frac{20}{27}$;

iar:

Scanned with OKEN Scanner

$$P(X\le 2/X>0,2)=\frac{P(0,2<X\le 2)}{P(X>0,2)}=\frac{P(X=1)+P(X=2)}{P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)}=\frac{18}{19}$$

c) $F\left(\frac{5}{2}\right)=P\left(X<\frac{5}{2}\right)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{26}{27}$.

d) $F(X)=P(X<x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{8}{27}, & 0<x\le 1\\ \frac{8}{27}+\frac{4}{9}=\frac{20}{27}, & 1<x\le 2\\ \frac{20}{27}+\frac{2}{9}=\frac{26}{27}, & 2<x\le 3\\ \frac{26}{27}+\frac{1}{27}=1, & x>3\end{cases}$;

e) $M(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i f(x_i)=0\cdot\frac{8}{27}+1\cdot\frac{12}{27}+2\cdot\frac{6}{27}+3\cdot\frac{1}{27}=1;$

$M(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2 f(x_i)=0^2\cdot\frac{8}{27}+1^2\cdot\frac{12}{27}+2^2\cdot\frac{6}{27}+3^2\cdot\frac{1}{27}=\frac{5}{3}$;

$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$; $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

f) $P\left(|X-1|<\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=P\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}<X-1<\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=P\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}+1<X<\frac{\sqrt{6}}{3}+1\right)=$

$=P(0,184<X<1,816)=P(X=1)=\frac{4}{9}$.

g) $\mu_3(X)=\sum_{i=1}^{4}(x_i-M(X))^3 f(x_i)=$

$=(0-1)^3\cdot\frac{8}{27}+(1-1)^3\cdot\frac{12}{27}+(2-1)^3\cdot\frac{6}{27}+(3-1)^3\cdot\frac{1}{27}=\frac{2}{9}$.

h) Modul variabilei aleatoare X este valoarea cu probabilitatea cea mai mare. Se observă că valoarea cu probabilitatea cea mai mare este 1, deci modul este 1.

Scanned with OKEN Scanner

13. Într-un depozit sunt 5 piese bune şi 10 piese defecte, iar în altul, 6 piese bune şi 4 piese defecte. Se ia la întâmplare din fiecare depozit câte o piesă. Fie X variabila aleatoare ce indică numărul de piese bune obținute în cele 2 extrageri. Determinați repartiția v.a. X.

Soluție.

a) Variabila aleatoare poate lua valorile 0,1 sau 2. Pentru calcularea probabilităților utilizăm schema lui Poisson, unde $p_1=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$, $q_1=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$, $p_2=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, $q_2=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$. Probabilitățile sunt date de coeficienții termenilor cu x din dezvoltarea: $(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)=\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}\right)$.

$$P(X=0)=q_1q_2=\frac{4}{15},\ P(X=1)=p_1q_2+p_2q_1=\frac{8}{15},$$

$$P(X=2)=p_1p_2=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}.$$

Astfel repartiția variabilei aleatoare X este:

$$X:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{4}{15} & \frac{8}{15} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

14. Fie variabila aleatoare cu distribuția

$$X:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix},$$

asociată aruncării unui zar. Calculați probabilitatea $P(X<4)$.

Soluție.

$$P(X<4)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

15. Se dă funcția $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$. Verificați dacă $f(x)$ este o densitate de repartiție a unei variabile aleatoare continue.

Soluție. Observăm că pentru $\forall x\in[a,b]$ funcția $f(x)\geq 0$.

Trebuie să mai arătăm că $\int_a^b f(x)dx=1$.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot x\Big|_a^b=\frac{1}{b-a}\cdot(b-a)=1.$$

16. Să se determine $\alpha\in\mathbf{R}$ astfel încât funcția $f:[-3,3]\to\mathbf{R}$ dată prin $f(x)=3\alpha^2$ să fie o densitate de repartiție.

Soluție. Evident $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[-3,3]$. Impunem cea de-a doua condiție și obținem:

$$\int_{-3}^3 f(x)dx=\int_{-3}^3 3\alpha^2dx=3\alpha^2\cdot x\Big|_{-3}^3=3\alpha^2\cdot(3+3)=18\alpha^2=1,$$

de unde $\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

17. Să se determine constanta c astfel ca variabila aleatoare X să admită ca densitate de repartiție funcția $f(x)=\dfrac{c}{e^x+e^{-x}}$, $x\in\mathbf{R}$.

Soluție. Mai întâi observăm că $f(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbf{R}$ dacă $c\geq 0$. Din condiția $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ deducem:

Scanned with OKEN Scanner

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c}{e^{x}+e^{-x}}dx=c\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{e^{-x}\left(e^{2x}+1\right)}dx=c\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x}}{e^{2x}+1}dx=c\left(arctg\ e^{x}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=c\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=1$$

de unde aflăm $c=\frac{2}{\pi}>0$.

18. Determinaţi parametrul real m astfel încât funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, dată prin $f(x)=\begin{cases}m(4-x), & x\in[0,4]\\ 0, & \text{in rest}\end{cases}$ să fie densitatea de repartiţie a unei variabile aleatoare X şi scrieţi apoi funcţia de repartiţie a cestei variabile.

Soluţie. Trebuie ca $f(x)\geq 0$, ceea ce implică $m\geq 0$ şi $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$.

Avem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{+\infty}f(x)dx=\lambda\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=\lambda\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_{0}^{+\infty}=1.$$

Cele două condiţii fiind verificate, rezultă că f este o densitate de repartiţie a unei variabile aleatoare X. Atât pentru calcularea mediei cât şi a dispersiei vom utiliza metoda integrării prin părţi.

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_{0}^{+\infty}x\left(e^{-\lambda x}\right)'dx=$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=0-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{4}f(x)dx+\int_{4}^{+\infty}f(x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{4}m(4-x)dx+\int_{4}^{+\infty}0dx=m\left(4x-\frac{x^{2}}{2}\right)\Big|_{0}^{4}=8m=1\Rightarrow m=\frac{1}{8}.$$

Astfel f devine

Scanned with OKEN Scanner

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{8}x,\ x\in[0,4]\\ 0,\ \text{in rest}\end{cases}.$$

Funcția de repartiție a variabilei aleatoare X este $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$.

- Dacă $x\in(-\infty,0]$ atunci $F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$.
- Dacă $x\in(0,4]$ atunci

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}t\right)dt=\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\cdot\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}\cdot x^2.$$

- Dacă $x\in(4,+\infty)$ atunci $F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}t\right)dt+\int_{4}^{x}0dt=1$.

În concluzie am obținut:

$$F:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ F(x)=\begin{cases}0,\ x\in(-\infty,0]\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{16}\cdot x^2,\ x\in(0,4]\\ 1,\ x\in(4,+\infty)\end{cases}.$$

19. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$. Arătați că f este o densitate de repartiție a unei variabile aleatoare X şi apoi calculați media şi dispersia ei.

Soluție. Evident $f(x)\ge 0$, $\forall x\in\mathbf{R}$ dacă $\lambda\ge 0$. Apoi calculăm

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_{0}^{+\infty}xe^{-\lambda x}dx=$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= 0 + \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Prin înlocuire în formula dispersiei obținem: $D(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

20. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$. Arătați că f este o densitate de repartiție a unei variabile aleatoare X și apoi calculați media și dispersia ei.

Soluție: Evident $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Apoi calculăm

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = 2\frac{e^{-2x}}{-2}\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Cele două condiții fiind verificate, rezultă că f este o densitate de repartiție a unei variabile aleatoare X. Atât pentru calcularea mediei cât și a dispersiei vom utiliza metoda integrării prin părți.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx = \int_0^{+\infty} 2xe^{-2x}dx = -\int_0^{+\infty} x\left(e^{-2x}\right)'dx =$$

$$= -xe^{-2x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = 0 - \frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} 2x^2e^{-2x}dx = -x^2e^{-2x}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} xe^{-2x}dx =$$

$$= 0 + \frac{2}{2}\int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x}dx = \frac{2}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Prin înlocuire în formula dispersiei obținem: $D(X) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

21. Se dă funcția de repartiție $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -3e^{-3x}, & x \geq 0 \end{cases}$. Să se scrie densitatea de repartiție și să se determine funcția caracteristică.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Densitatea de repartiție este dată de $f(x)=\begin{cases}0 & ,x<0\\ 9e^{-3x}, & x\geq 0\end{cases}$ care evident este pozitivă şi se poate verifica ipoteza $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. Funcția caracteristică se calculează cu ajutorul formulei:

$$f_c(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f(x)dx=9\int_{0}^{+\infty} e^{itx}e^{-3x}dx=9\int_{0}^{+\infty} e^{-x(3-it)}dx=$$

$$\frac{9}{-(3-it)}\cdot e^{-x(3-it)}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{9}{3-it}.$$

22. Se dă funcția de repartiție $F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0\\ x^{10}, & 0\leq x<1\\ 2 & , \quad x\geq 1\end{cases}$. Să se scrie densitatea de repartiție şi să se determine funcția caracteristică.

Soluție. Densitatea de repartiție este dată de $f(x)=\begin{cases}10x^9 & ,x\in[0,1)\\ 0 & ,\text{ in rest}\end{cases}$ care evident este pozitivă şi se poate verifica ipoteza $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. Funcția caracteristică se calculează cu ajutorul formulei: $f_c(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f(x)dx$, şi se aplică apoi formula de integrare prin părți.

Scanned with OKEN Scanner

7.11. Distribuții continue

7.11.1. Distribuția uniformă pe un interval $[a;b]$

Spunem că variabila aleatoare X are ***distribuția uniformă*** *pe intervalul $[a;b]$ dacă are densitatea de probabilitate*

$$f(x)=\begin{cases}0, x\in \mathrm{R}\setminus[a;b]\\ \dfrac{1}{b-a}, x\in[a;b]\end{cases}.$$

- Funcția de repartiție va fi dată de

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0, x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, x\in[a;b]\\ 1, x>b\end{cases}.$$

- Momentul de ordinul r va fi

$$M_r=\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx=\int_a^b x^r\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^{r+1}}{r+1}\Big|_a^b=\frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{(b-a)(r+1)}.$$

Atunci valoarea medie se calculează :

$$m=M_1(x)=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}.$$

Se poate calcula analog şi dispersia:

$$D^2(X)=M_2(X)-M^2(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

7.11.2. Distribuția normală a lui Gauss

Spunem că variabila aleatoare X are distribuția normală de parametri m şi σ dacă are densitatea de probabilitate

Scanned with OKEN Scanner

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\ \forall x\in\mathbf{R}.$$

- Putem să demonstrăm că $f(x)$ este o densitate de probabilitate.
- Calculăm media $M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}dx$.

Efectuăm schimbarea de variabilă

$$\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}=t\Rightarrow x-m=\sigma\sqrt{2}t\Rightarrow x=\sqrt{2}\sigma t+m.$$

Deci $dx=\sigma\sqrt{2}dt$ şi observăm că nu se modifică limitele de integrare. Astfel

$$M(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(m+\sigma\sqrt{2}t\right)e^{-t^2}\sigma\sqrt{2}dt=\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2}dt+\frac{m}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt.$$

Deoarece funcţia de sub prima integrală este o funcţie impară ($f(-t)=-f(t)$), rezultă că integrala se anulează şi ţinând cont de integrala Gauss: $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, obţinem:

$$M(X)=\frac{m}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{2m}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{2m}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=m;$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)^2\rho(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2e^{-\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2}dx.$$

Utilizând aceeaşi substituţie integrala devine:

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sigma\sqrt{2}t\right)^2e^{-t^2}\sigma\sqrt{2}dt=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt=\frac{4\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt.$$

Scriem $te^{-t^2}=\left(\frac{e^{-t^2}}{-2}\right)'$ şi folosim metoda integrării prin părţi:

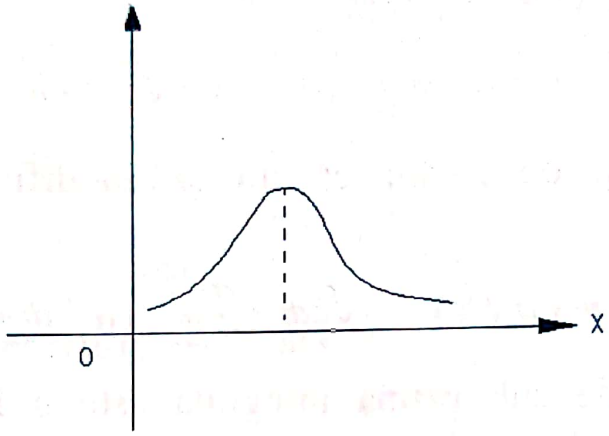
$$D(X)=\frac{4\sigma^2}{\sqrt{\pi}}t\frac{e^{-t^2}}{-2}\Bigg|_0^{+\infty}+\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=0+\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sigma^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Propoziție. *Pentru o variabilă aleatoare X cu distribuție normală, avem:*

$$M(X)=m \text{ şi } D(X)=\sigma^2.$$

Graficul $f(x)$ este clopotul lui Gauss:



7.11.3. Distribuția gamma

Spunem că variabila aleatoare X are distribuția gamma dacă are densitatea de probabilitate dată de :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(a)b^a}x^{a-1}\cdot e^{-\frac{x}{b}}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

Arătăm că f este o densitate de probabilitate:

1) $f(x)\geq 0, \forall x\in \mathbf{R}$ este evident adevărată;

2) verificăm dacă $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(a)b^a}x^{a-1}\cdot e^{-\frac{x}{b}}dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(a)b^a}\cdot x^{a-1}\cdot e^{-\frac{x}{b}}dx=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(a)b^a}\int_{0}^{+\infty}(tb)^{a-1}\cdot e^{-t}\cdot b\cdot dt=\frac{b^a}{\Gamma(a)b^a}\int_{0}^{+\infty}t^{a-1}e^{-t}dt=\frac{1}{\Gamma(a)}\Gamma(a)=1$$

Scanned with OKEN Scanner

unde am utilizat substituția $\frac{x}{b}=t\left(\Rightarrow x=tb\Rightarrow dx=bdt\right)$ şi am ținut cont de integrala gamma $\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}t^{a-2}e^{-t}dt$.

Reamintim că pentru integrala gamma avem şi următoarea relație de recurență $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$.

În continuare calculăm media şi dispersia.

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\frac{1}{\Gamma(a)}\frac{1}{b^a}x^{a-1}e^{-\frac{x}{b}}dx=\frac{1}{\Gamma(a)}\cdot\frac{1}{b^a}\int_0^{+\infty}x^ae^{-\frac{x}{b}}dx.$$

Pentru rezolvarea acestei integrale vom face următoarea substituție:

$$\frac{x}{b}=t\Rightarrow x=bt\Rightarrow dx=bdt$$

şi observând că limitele de integrare se păstrează, obținem:

$$M(X)=\frac{1}{\Gamma(a)}\cdot\frac{1}{b^a}\int_0^{+\infty}t^ab^ae^{-t}bdt=\frac{b}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}t^ae^{-t}dt=$$

$$=\frac{b}{\Gamma(a)}\Gamma(a+1)=\frac{b}{\Gamma(a)}a\Gamma(a)=ab.$$

Calculăm momentul de ordinul 2:

$$M\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\rho(x)dx=\frac{1}{\Gamma(a)}\cdot\frac{1}{b^a}\int_0^{+\infty}x^{a+1}e^{-\frac{x}{b}}dx$$

şi utilizând substituția anterioară avem:

$$M\left(X^2\right)=\frac{1}{\Gamma(a)}\cdot\frac{1}{b^a}\int_0^{+\infty}b^{a+1}t^{a+1}e^{-t}bdt=\frac{b^2}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}t^{a+1}e^{-t}dt=\frac{b^2}{\Gamma(a)}\Gamma(a+2)=$$

$$=\frac{a(a+1)b^2\Gamma(a)}{\Gamma(a)}=a(a+1)b^2.$$

Prin înlocuire în formula dispersiei obținem:

$$D(X)=a(a+1)b^2-(ab)^2=ab^2.$$

Propoziție. *Pentru o variabilă aleatoare X cu distribuție gamma, avem:*

$$M(X)=ab \text{ şi } D(X)=ab^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

7.11.4. Distribuția beta

Spunem că variabila aleatoare X are distribuția β de parametri a şi b $(a>0, b>0)$ dacă are densitatea de probabilitate dată de :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta(a,b)}x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}, & x\in[0,1]\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases}.$$

Propoziție. *Dacă variabilă aleatoare X are distribuția beta, atunci:*

$$M(X)=\frac{a}{a+b} \text{ şi } D(X)=\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

7.11.5. Distribuția χ^2.

Spunem că variabila aleatoare X are distribuția χ^2 cu n grade de libertate dacă are densitatea de probabilitate dată de :

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot x^{\frac{n}{2}-1}, & x>0.\end{cases}$$

Propoziție. *Pentru o variabilă aleatoare X ce satisface distribuția χ^2 avem:*

$$M(X)=n \text{ şi } D(X)=2n.$$

Scanned with OKEN Scanner

7.11.6. Distribuția student.

Spunem că variabila aleatoare X are distribuția student dacă are densitatea de probabilitate dată de:

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\ x\in\mathbf{R}.$$

Propoziție. *Dacă variabilă aleatoare X are distribuția student, atunci:*

$$M(X)=0 \text{ şi } D(X)=\frac{n}{n-2}.$$

7.11.7. Distribuția exponențială.

Spunem că o variabilă aleatoare X are distribuția exponențială de parametru $\lambda>0$ dacă densitatea de probabilitate este dată de:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

Propoziție. *Dacă variabila aleatoare X are distribuția exponențială de parametru $\lambda>0$, atunci:*

$$M(X)=\frac{1}{\lambda} \text{ şi } D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Demonstrație.

Atât pentru calcularea mediei cât şi a dispersiei vom utiliza metoda integrării prin părți.

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\rho(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_{0}^{+\infty}x\left(e^{-\lambda x}\right)'dx=$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = 0 - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\rho(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = -x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx =$$

$$= 0 + \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Prin înlocuire în formula dispersiei obținem: $D(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

7.12. Distribuții discrete

7.12.1. Distribuția discretă uniformă.

Spunem că variabila aleatoare X are distribuție discretă uniformă de parametru n dacă pentru orice $k \in \{1,2,...,n\}$,

$$p_k = P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

Tabloul de repartiție este: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

Propoziție. *Dacă X este o variabilă aleatoare cu distribuție discretă uniformă atunci media va fi dată de $M(X) = \frac{n+1}{2}$, iar dispersia de $D(X) = \frac{n^2-1}{12}$.*

Demonstrație.

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot p(x_k) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = 1\cdot\frac{1}{n} + 2\cdot\frac{1}{n} + \dots + n\cdot\frac{1}{n} =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \frac{1+2+...+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}$$

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot p(x_k) - M^2(X) = 1^2 \cdot \frac{1}{n} + 2^2 \cdot \frac{1}{n} + ... + n^2 \cdot \frac{1}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1^2+2^2+...+n^2}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

7.12.2. Distribuția binomială

Spunem că variabila aleatoare X are distribuție binomială de parametri n şi p (n întreg pozitiv, $0<p<1$) dacă pentru orice $k \in \{0,1,2,...,n\}$,

$$p_k = P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

unde $q = 1-p$.

Propoziție. *Dacă X este o variabilă aleatoare cu distribuție binomială atunci media, respectiv dispersia vor fi date de:*

$$M(X) = n \cdot p, \text{ respectiv } D(X) = n \cdot p \cdot q.$$

Demonstrație.

Folosim identitatea: $(px+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k x^k q^{n-k}$. Prin derivarea acestei identități în raport cu x obținem: $np(px+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k x^{k-1} q^{n-k}$.

Dar $M(X) = \sum_{i=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}$, ceea ce înseamnă că în relația de mai sus, luându-l pe $x=1$ obținem $M(X) = np(p+q)^{n-1}$. Ținând cont că $p+q=1$, obținem $M(X) = np$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru calcularea dispersiei utilizăm formula $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$; mai întâi vom calcula momentul de ordin 2

$$M(X^2)=\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Pentru calcule, utilizăm din nou identitatea anterioară, a cărei derivată de ordinul I o înmulţim cu x şi o derivăm încă o dată, obţinând:

$$np(px+q)^{n-1}+np^2(n-1)x(px+q)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k p^k x^{k-1}q^{n-k}.$$

În această relaţie îl luăm pe $x=1$ şi ţinând cont de faptul că membrul drept reprezintă chiar $M(X^2)$ şi că $p+q=1$, obţinem:

$$M(X^2)=np+n(n-1)p^2=np(1+np-p)=np(np+q).$$

Dispersia va fi în acest caz

$$D(X)=np(np+q)-(np)^2=npq.$$

7.12.3. Distribuţia Poisson.

O variabila aleatoare X are distribuţia Poisson cu parametrul $\lambda>0$, dacă ea poate lua orice valoare întreagă pozitivă iar

$$p_k=P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-k},\ k=0,1,2,\ldots.$$

Propoziţie. *Dacă X este o variabilă aleatoare cu distribuţie Poisson atunci:*

$$M(X)=\lambda \text{ şi } D(X)=\lambda.$$

Demonstraţie.

$$M(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda.$$

Pentru calcularea dispersiei utilizăm formula

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X).$$

Scanned with OKEN Scanner

Folosim următorul artificiu de calcul:

$$\lambda^2 = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} - e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = M\left(X^2\right) - M(X) = M\left(X^2\right) - \lambda,$$

de unde rezultă că

$$M\left(X^2\right) = \lambda^2 + \lambda.$$

În final obținem

$$D(X) = M\left(X^2\right) - M^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

7.12.4. Distribuția hipergeometrică

O variabila aleatoare X are distribuția hipergeometrică de parametri a,b şi n (a,b,n numere întregi pozitive, $n \le a+b$) dacă pentru orice k, $\max(0,n-b) \le k \le \min(n,a)$ avem:

$$p_k = P(X=k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}.$$

Propoziție. *Dacă X este o variabilă aleatoare cu distribuția hipergeometrică atunci media, respectiv dispersia vor fi date de:*

$$M(X) = \frac{na}{a+b}, \text{ respectiv } D(X) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}.$$

Demonstrație.

Ştim că $M(X) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$.

Pentru calcularea mediei utilizăm următoarele calcule:

1) $kC_a^k = k\frac{a!}{k!(a-k)!} = k\frac{a(a-1)!}{k(k-1)!(a-k)!} = a\frac{(a-1)!}{(k-1)!(a-k)!} = aC_{a-1}^{k-1}$;

Scanned with OKEN Scanner

2) $\sum_{k=0}^{n} C_a^k C_b^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k C_a^k C_b^{n-k} = a\sum_{k=1}^{n} C_{a-1}^{k-1} C_b^{n-k} = aC_{a+b-1}^{n-1}$, unde ținem cont de faptul că $\sum_{k=0}^{n} C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^{n}$.

Astfel media devine:

$$M(X) = \frac{aC_{a+b-1}^{n-1}}{C_{a+b}^{n}} = a\frac{(a+b-1)!}{(n-1)!(a+b-n)!}\cdot\frac{n!(a+b-n)!}{(a+b)!} = \frac{na}{a+b}.$$

Pentru calcularea dispersiei utilizăm formula

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X),$$

deci mai întâi calculăm momentul de ordin 2.

$$M(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^{n}} = \frac{1}{C_{a+b}^{n}}\sum_{k=0}^{n} k^2 C_a^k C_b^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{C_{a+b}^{n}}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_a^k C_b^{n-k} + \frac{1}{C_{a+b}^{n}}\sum_{k=0}^{n} kC_a^k C_b^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{C_{a+b}^{n}}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_a^k C_b^{n-k} + M(X)$$

unde evident $k^2 = k(k-1)+k$.

Calculăm:

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_a^k = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{a!}{k!(a-k)!} =$$

$$= a(a-1)\sum_{k=2}^{n}\frac{(a-2)!}{(k-2)!(a-k)!} = a(a-1)\sum_{k=2}^{n} C_{a-2}^{k-2}.$$

Revenind în formula momentului de ordinul 2 avem:

$$M(X^2) = \frac{a(a-1)}{C_{a+b}^{n}}\sum_{k=2} C_{a-2}^{k-2} C_b^{n-k} + M(X) =$$

$$= \frac{a(a-1)n!(a+b-n!)(a+b-2)!}{(a+b)!(n-2)!(a+b-n)!} + \frac{na}{a+b} = \frac{na(na+b-n)}{(a+b)(a+b-1)}$$

Atunci

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{na(na+b-n)}{(a+b)(a+b-1)} - \frac{n^2a^2}{(a+b)^2} = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

Scanned with OKEN Scanner

7.12.5. Distribuția geometrică.

Spunem că o variabilă aleatoare X are distribuția geometrică de parametru p $(0<p<1)$ dacă ea poate lua orice valoare întreagă pozitivă și

$$p_k = P(X=k) = pq^{k-1},$$

unde $q = 1-p$.

Propoziție. *Dacă X este o variabilă aleatoare cu repartiție geometrică atunci:*

$$M(X)=\frac{1}{p},\ D(X)=\frac{q}{p^2}.$$

7.13. Populația statistică. Variabilele populației statistice

Statistica matematică este o ramură a matematicii care elaborează noțiunile și metodele folosite în statistică. Ea se ocupă cu gruparea, analiza și intrepretarea datelor referitoare la un anumit fenomen, precum și cu unele previziuni privind producerea lui viitoare, pornind de la cauzele ce stau la baza acestuia.

Cercetarea statistică reprezintă totalitatea operațiilor de observare, culegere, prelucrare, analiză și interpretare a informațiilor. Ne va interesa procesul de grupare a datelor, deoarece atunci când cantitatea datelor disponibile depășește un anumit volum, gruparea este necesară pentru a sesiza tabloul de ansamblu sugerat de aceste date.

Studiul statistic presupune următoarele etape:

Scanned with OKEN Scanner

1. Culegerea datelor.

Această etapă se poate realiza printr-o anchetă, interviu, sondaje.

2. Prezentarea datelor.

La sfârşitul anchetei se prezintă rezultatele sub forma unui tabel de date ce reproduce răspunsurile sau sub formă grafică.

3. Calculul parametrilor caracteristici.

Se va determina modul, media, mediana, dispersia şi abaterea mediei pătratică pe baza seriei statistice.

4. Exploatarea rezultatelor.

Se vor da anumite predicţii privind comportarea viitoare a fenomenului studiat.

Vom exemplifica printr-o anchetă (sondaj) asupra unor studenţi ce au răspuns la următoarele întrebări:

a) Aţi pregătit examenul la matematică?
b) Cât timp în total?
c) Aţi reuşit în ansamblu?
d) Câte personae au lucrat împreuna cu voi?

Vom prezenta datele obţinute sub forma unor tabele. Tabelele statistice reprezintă forma de bază a prezentării rezultatelor prelucrării datelor de evidenţă. Alături de funcţia de prezentare a rezultatelor prelucrării primare şi secundare a datelor statistice, tabelele statistice au şi funcţia de sistematizare a datelor în vederea prelucrării lor. Tabelele statistice conţin una sau mai multe serii statistice.

Tabelul statistic trebuie să fie elaborat după anumite reguli privind elementele de conţinut şi de formă.

Cel mai des se întâlnesc *tabele simple* (se prezintă indicatorii statistici ai unităţilor statistice la care se referă datele), tabele de prelucrare: *pe grupe* (atunci când se centralizează frecvenţele şi valorile caracteristicilor ce se găsesc într-o relaţie de dependenţă), *combinate* (când avem cel puţin două caracteristici de grupare), *de asociere.*

Pentru întrebarea a):

Scanned with OKEN Scanner

x_i	**DA**	**NU**	Total
n_i	*31*	*3*	*34*

Pentru întrebarea b):

Timp	n_i
$0 \le t < 15$	7
$15 \le t < 30$	5
$30 \le t < 60$	8
$60 \le t < 120$	10
$120 \le t < 180$	4
Total	34

Pentru întrebarea c):

x_i	Foarte mult	Suficient	Puțin	Deloc	Total
n_i	*7*	*14*	*10*	*3*	*34*
f_i	*20%*	*40%*	*30%*	*10%*	*100%*

Pentru întrebarea d):

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*Total*
n_i	*9*	*12*	*5*	*6*	*2*	*34*

Definiția 7.13.1.1. *Numim* ***populație statistică*** *mulțimea fenomenelor de aceeași natură pe care se realizează studiul statistic.*

Exemplu. Mulțimea studenților unui an de studiu.

Definiția 7.13.1.2. *Numim* ***eșantion*** *o submulțime a populației statistice.*

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Submulţimea studenţilor dintr-o grupă asupra cărora s-a efectuat sondajul.

Elementele populaţiei statistice poartă numele de **unităţi statistice sau indivizi.**

Totalitatea unităţilor unei populaţii statistice se numeşte **efectivul total al populaţiei statistice** şi se notează cu n sau N. În exemplul dat $N = 34$.

În cadrul unui sondaj (anchetă) se studiază diferiţi indicatori statistici ale unităţilor statistice.

Criteriile pe baza cărora se caracterizează unităţile statistice poartă denumirea de caracteristici statistice sau ***variabile statistice.***

Să dăm câteva exemple de caracteristici statistice din sondajul de mai sus:

- calitatea de student care a pregătit examenul la matematică
- intervalul de timp cât a durat pregătirea;
- calitatea de reuşită a activităţilor de pregătire;
- numărul de personae care au făcut parte din grupul de pregătire.

Valorile înregistrate de aceeaşi caracteristică la unităţile statistice se numesc **variante** sau **valori**.

Clasificarea variabilelor statistice

După conţinutul lor variabilele pot fi:

- **cronologice**, având ca valori unităţi de timp;
- **teritoriale**, având ca valori unităţi de suprafaţă;
- **atributive**, pot fi cu variabile cantitative (numerice) sau cu variabile calitative.

Exemplu. Numărul de persoane ce au făcut parte din grupul de pregătire este o variabilă discretă.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă însă variabila cantitativă ia valori într-un interval, ea se va numi ***variabilă cantitativă*** *continuă, iar intervalele se vor numi* ***grupe.***

Observaţie. Dacă avem un număr mare de valori ale variabilei cantitative discrete ele se vor împărți, la rândul lor, în clase.

Evaluarea repartiției variabilei statistice

Reamintim că prin **frecvență absolută** a unei valori a unei variabile înțelegem numărul de indivizi având această valoare.

Dacă vom nota valoarea variabilei cu x sau cu t, frecvența absolută se va nota cu n_x sau n_t, iar dacă vom nota valoarea caracteristicii cu x_i atunci frecvența se va nota cu n_i, pentru $i=1,2,...,n$.

Definiția 7.13.1.3. *Numim* ***frecvență relativă*** *a unei valori a variabilei raportul dintre frevența absolută a valorii variabilei şi efectivul total al populației .*

$$f_x=\frac{n_x}{N} \text{ sau } f_i=\frac{n_i}{N},\ i=1,2,...,n.$$

Exprimată în procente, frecvența relativă este dată de $f_{x\%}=\frac{n_x}{N}*100$ sau $f_{i\%}=\frac{n_i}{N}*100$.

Definiția 7.13.1.4. ***Frecvența relativă cumulată*** *este egală cu suma frecvențelor relative din toate clasele cu valori inferioare până la valoarea dată.*

Rezultatul sistematizării datelor prin grupare/clasificare se constituie sub forma seriilor statistice.

Definiția 7.13.1.5. ***Seria statistică*** *este prezentarea ordonată a datelor referitoare la manifestările unui fenomen colectiv sub forma a două şiruri de date: unul priveşte variabila şi modul cum a fost sistematizată, iar al doilea frecvența de apariție sau nivelul unei variabile în raport cu primul şir.*

Scanned with OKEN Scanner

Seriile statistice se pot reprezenta grafic prin diagrame structurale, iar frecvențele variabilei vor reprezenta porțiuni din aceste suprafețe proporționale cu frecvențele f_i. Graficele constau în exprimarea datelor statistice din tabele prin linii sau puncte, figuri geometrice, hărți, simboluri. Cel mai adesea, graficele statistice sunt reprezentate într-un **sistem de coordonate rectangulare (ortogonale)**, adică în raport şi proporțional cu două axe perpendiculare, dar se pot întâlni şi grafice reprezentate într-un **sistem de coordonate polare**.

Rețeaua graficului este alcătuită dintr-un sistem de linii verticale şi orizontale sau de cercuri concentrice care ajută la construirea graficului.

Scara de reprezentare stabileşte corespondența dintre o unitate de măsură aleasă pe grafic şi unitatea relativă la X (sau Y). Scările de reprezentare pot fi aritmetice, logaritmice sau semilogaritmice.

Legenda graficului are rolul de a explica diversele simboluri, haşuri, culori folosite pentru a facilita înțelegerea reprezentării construite.

În afara acestor elemente specifice reprezentărilor grafice, trebuie să subliniem necesitatea prezenței unor elemente comune şi tabelelor statistice: **titlul, sursa datelor, numerotarea, note explicative** etc. Pentru a reprezenta corect proporțiile şi rapoartele care se înregistrează între datele statistice prin intermediul graficelor, utilizăm **figuri geometrice, hărți, diagrame figurale** etc.

Scanned with OKEN Scanner

Reprezentăm tabelul **c)** cu răspunsul la întrebarea: "Ați reuşit în ansamblu?"

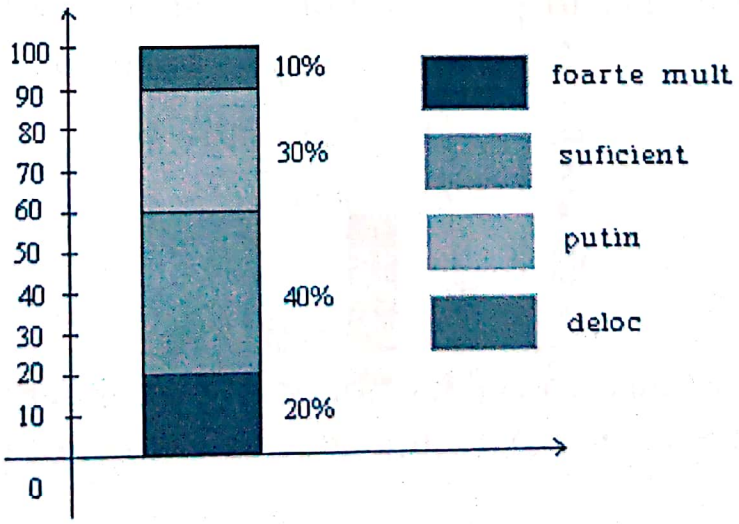
x_i	Foarte mult	Suficient	Puțin	Deloc	Total
n_i	*7*	*14*	*10*	*3*	*34*
f_i	*20%*	*40%*	*30%*	*10%*	*100%*

1) Reprezentarea dreptunghiul de structură al variabilei.

Fie un sistem de 2 drepte perpendiculare; dreapta verticală va reprezenta axa frecvențelor f_i cu lungimea de 100 unități divizată din 10 în 10.

Vom construi un dreptunghi având înălțimea de 100 cu baza pe dreapta orizontală şi împărțim dreptunghiul cu parale la dreapta orizontală duse din 10 în 10.

Astfel se obține următoarea reprezentare:

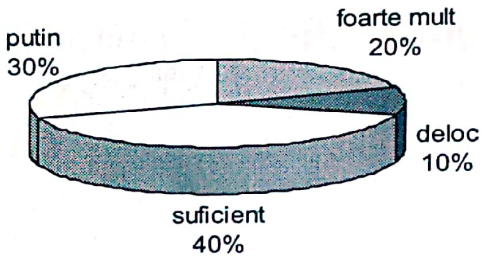


Scanned with OKEN Scanner

2) Reprezentarea cercului de structură.

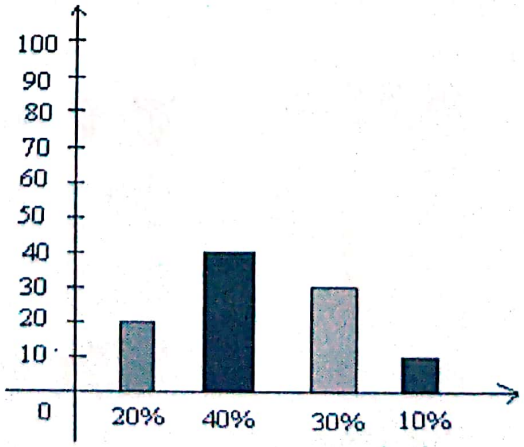
Vom construi un cerc a cărui arie este 100%. Vom reprezenta valorile variabilei prin **sectoare de cerc** ale căror arii vor fi proporționale cu frecvențele f_i. Pentru aceasta trebuie să găsim unghiul la centru ce determină cele 4 sectoare ale cercului.

10% - va avea unghiul la centru de 36°
20% - va avea unghiul la cerc de 72°
30% - va avea unghiul la cerc de 108°
40% - va avea unghiul la cerc de 144°.



3) Reprezentarea diagramelor prin benzi sau coloane.

Aceste benzi sau coloane sunt dreptunghiuri cu bazele egale aşezate la distanță egală cu jumătatea bazelor dreptunghiului unul față de altul.



Scanned with OKEN Scanner

4) Reprezentarea diagramelor prin cercuri.

Vom reprezenta cu ajutorul a 4 cercuri a căror rază se calculeaza după formula: $S_i = \pi R_i^2$, de unde $R_i = \sqrt{\frac{S_i}{\pi}}$, $\pi = 3{,}14$.

5) Reprezentarea diagramelor prin pătrate.

Vom lua ca exemplu suprafețele în km^2 ale unor continente .

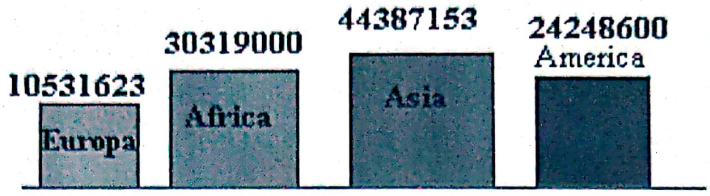
Continentul	**Suprafața(km^2)**
Europa	*10526623*
Africa	*30319000*
Asia	*44387153*
America de N şi centrală	*24248600*

Vom reprezenta suprafețele prin pătrate. Pentru aceasta este necesar să aflăm latura pătratului, utilizând formula ariei pătratului: $S_i = l^2$, de unde $l = \sqrt{S_i}$

$$l_1 = \sqrt{10531623} = 3245.2\,km$$
$$l_2 = \sqrt{30319000} = 5506.3\ km$$
$$l_3 = \sqrt{44387153} = 6602.3\ km$$
$$l_4 = \sqrt{24248600} = 4924.3\ km$$

Vom alege ca unitate de măsura *1cm* pentru *1000 km*. Deci vom construi pătrate cu laturile de *3cm*; *5,6cm*; *6,6cm*; *5cm* .

Scanned with OKEN Scanner

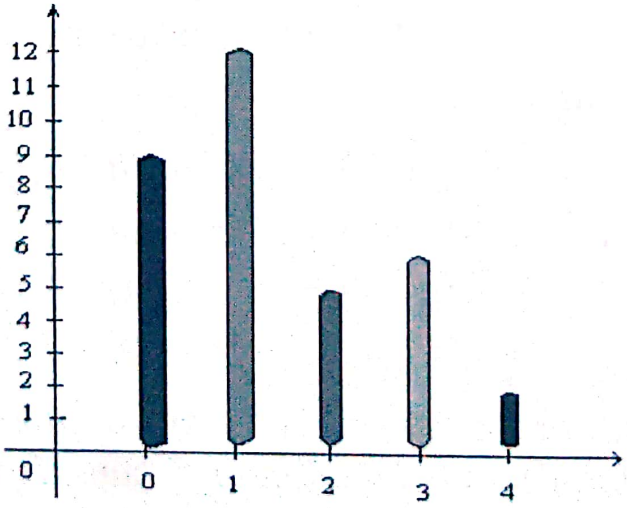


6) Reprezentarea grafică a seriilor statistice cu variabilă cantitativă discretă prin batoane

Pentru o reprezentare grafică cu ajutorul batoanelor, pe axa orizontală se trec valorile variabilelor, iar pe axa verticală se trec valorile frecvențele absolute. Se ridică din punctele axei orizontale segmente verticale de lungimi diferite determinate de punctele de pe axa verticală ce reprezintă valorile frecvențelor absolute corespunzătoare.

Exemplu. Vom reprezenta prin batoane numărul de studenți care au făcut parte din grupul de pregătire.

x_i	0	1	2	3	4	**Total**
n_i	9	12	5	6	2	**34**



Scanned with OKEN Scanner

7.14. Indicatori statistici

Definiția 7.14.1. ***Indicatorul statistic*** *reprezintă expresia numerică a unor fenomene şi procese social-economice, definite în timp, spațiu şi structură organizatorică.*

Indicatorii statistici pot fi **primari** şi **derivați**.

Indicatorii primari se obțin, de regulă, în etapa de sistematizare a datelor statistice, prin centralizarea şi agregarea acestora.

Indicatorii derivați se obțin prin prelucrarea mărimilor absolute ale indicatorilor primari.

Indicatorii statistici îndeplinesc funcții de măsurare, comparare, de analiză statistică, sinteză, estimare, verificare a ipotezelor. Cele trei proprietăți majore ale seriilor de date numerice, pe care le putem analiza folosind indicatorii statistici sunt cele privitoare la tendința centrală, la variabilitatea şi la forma distribuțiilor.

Indicatori medii

Mediile sunt mărimi statistice care exprimă sintetic ceea ce este carecteristic pentru toți indivizii unei colectivități distribuite după o caracteristică anume.

1. ***Media aritmetică*** *este dată de raportul dintre valoarea totală a caracteristicii şi numărul total al indivizilor.* Ea reprezintă valoarea pe care ar purta-o fiecare individ al colectivității dacă distribuția ar fi omogenă. Unitatea de măsură a mediei este aceeaşi cu a caracteristicii statistice studiate.

- **media simplă**: când frecvențele f_i sunt egale oricare ar fi $i=1,\ldots,n$ avem $\overline{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, unde n reprezintă totalul populației statistice.

Scanned with OKEN Scanner

- **media ponderată**: când frecvențele f_i sunt diferite între ele avem $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$, unde n reprezintă totalul populației statistice.

Pentru serii statistice cu **intervale egale** avem:

$$\bar{x} = \frac{\sum \left(\frac{x_i - a}{k} \right) f_i}{\sum f_i} \cdot k + a,$$

unde a este mijlocul intervalului cu frecvența cea mai mare, k lungimea intervalului, iar x_i mijloacele intervalelor.

Pentru serii statistice cu **intervale neegale** se calculează mai întâi toate centrele intervalelor şi se aleg valorile cele mai potrivite pentru a şi k, astfel încât să se obțină o maximă simplificare a calculului.

2. ***Media armonică*** *poate fi:*

- **simplă**: $\bar{x}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$;
- **ponderată:** $\bar{x}_h = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \cdot f_i}$.

3. ***Media pătratică*** *reprezintă valoarea care, înlocuind termenii seriei ridicați la pătrat, nu modifică suma suma pătratelor lor.*

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, media pătratică simplă este: $\overline{x}_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$, iar media pătratică ponderată este: $\overline{x}_p = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i}}$.

4. Media geometrică *reprezintă rădăcina de ordinul n din produsul celor n valori ale seriei statistice date.*

- **media simplă:** $\overline{x}_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$;
- **media ponderată:** $\overline{x}_g = \sqrt[\sum_{i=1}^{n} f_i]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{f_i}}$.

Se cunoaşte inegalitatea mediilor: $\overline{x}_h < \overline{x}_g < \overline{x} < \overline{x}_p$.

Indicatori ai variaţiei

Aceşti indicatori măsoară împrăştierea valorilor individuale ale seriei, una faţă de alta, ori faţă de o valoare tipică.

1. Indicatori simpli.

- ***Amplitudinea variaţiei*** *se calculează ca diferenţă între valoarea maximă şi valoarea minimă a variabilei:* $A_x = x_{\max} - x_{\min}$.

Se observă că amplitudinea se calculează ţinând cont doar de valorile extreme ale caracteristicii; în concluzie ea nu este un indicator reprezentativ pentru seria dată.

- ***Amplitudinea relativă a variaţiei*** *este dată de:* $A\% = \frac{A}{\overline{x}} \cdot 100$.
- ***Abaterea individuală:*** $d_i = x_i - \overline{x}$, *ne arată împrăştierea fiecărei valori de la nivelul mediu.*

Calculată în expresie **relativă** abaterea individuală este:

Scanned with OKEN Scanner

$$d_{i\%} = \frac{d_i}{\bar{x}} \cdot 100 .$$

Prezintă interes **abaterea maximă pozitivă** dată de: $d^+_{max} = x_{max} - \bar{x}$ şi **abaterea maximă negativă** dată de: $d^-_{max} = x_{min} - \bar{x}$. Pentru fiecare dintre ele se poate calcula valoarea relativă. Dacă avem o distribuţie perfect simetrică atunci $d^+_{max} = d^-_{max}$.

2. Indicatori sintetici

Pentru a exprima printr-o singură valoare întreaga împrăştiere dintr-o serie, calculăm media abaterilor individuale. *Noua mărime, numită* ***abatere medie liniară****, ne arată cu cât se abat, în medie, valorile individuale de la media lor şi se exprimă în aceeaşi unitate de măsură cu a caracteristicii.*

- ***Abaterea medie liniară*** *reprezintă media simplă sau ponderată a abaterilor termenilor seriei de la media lor, luată în modul:*

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}, \text{ respectiv } \bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}.$$

Dacă avem o serie cu frecvenţe relative, atunci formula se va scrie sub forma:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| f_{i\%}}{100}.$$

- ***Abaterea medie pătratică (abaterea standard)*** *este media pătratică a abaterilor individuale ale termenilor seriei de la media lor, adică:* $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă avem o serie cu frecvenţe absolute atunci $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}}$,

iar pentru o serie cu frecvenţe relative $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_{i\%}}{100}}$.

- *Raportul dintre abaterea medie pătratică şi media seriei se numeşte* ***coeficient de variaţie*** *şi se exprimă de obicei în procente:*

$$v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100.$$

Cu cât coeficientul de variaţie are o valoare mai mică cu atât seria statistică dată este mai omogenă şi deci media este mai reprezentativă.

- ***Dispersia*** *reprezintă pătratul abaterii medie pătratice:*

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

Pentru o serie cu distibuţie de frecvenţe putem avea:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}, \text{ respectiv } \sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_{i\%}}{100}.$$

3. Indicatori de poziţie

Indicatorii mediii de poziţie sunt: modul, mediana, cuartilele, decilele, centilele.

- ***Modul*** *reprezintă valoarea cu frecvenţa cea mai mare din seria statistică dată.*

Dacă avem o serie cu intervale egale atunci mai întâi se determină intervalul cu frecvenţa cea mai mare (interval modal) şi apoi se determină modul utilizând formula:

$$Mo = x_0 + k \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2},$$

unde x_0 reprezintă limita inferioară a intervalului cu frecvenţa cea mai mare, k este lungimea acestui interval, iar Δ_1 şi Δ_2 reprezintă

Scanned with OKEN Scanner

diferențele dintre frecvența intervalului modal și frecvența intervalului precedent, respectiv următor ($\Delta_1 = f_{Mo} - f_{Mo-1}$, $\Delta_2 = f_{Mo} - f_{Mo+1}$).

Există serii unimodale (cu un singur mod), bimodale sau multimodale.

- ***Mediana*** *reprezintă valoarea din mijlocul seriei date, serie în care caracteristicile au fost ordonate crescător sau descrescător.*

Pentru o serie simplă cu un număr impar de termeni, mediana este dată de termenul din mijloc (al seriei ordonate crescător sau descrescător); dacă seria are un număr par de termeni, atunci mediana este media aritmetică a celor doi termeni din mijloc.

Pentru o serie cu distribuție de frecvențe calculăm mai întâi frecvențele cumulate și locul medianei după formula $u^{Me} = \frac{\sum f_i + 1}{2}$.

Dacă $\sum f_i > 500$ atunci $u^{Me} = \frac{\sum f_i}{2}$. Prima frecvență cumulată mai mare decât locul medianei ne indică intervalul (varianta) medianei.

Media, care se exprimă în aceeași unitate de măsură cu cea a caracteristicii date, se va calcula după formula:

$$Me = x_0 + k\frac{u^{Me} - \sum f_p}{f_{Me}},$$

unde x_0 reprezintă limita inferioară a intervalului median, k este lungimea acestui interval, iar f_p reprezintă frecvențele până la intervalul median (fără f_{Me}).

Observație. Între medie, mod și mediană, există în general relația:

$$\bar{x} - Mo = 3(\bar{x} - Me).$$

Dacă distribuția este simetrică atunci cele trei valori coincid.

- ***Cuartilele*** *reprezintă acele valori ale caracteristicii care împarte seria în patru părți egale.* Ele sunt în număr de trei și se notează cu Q_1, Q_2, Q_3.

Scanned with OKEN Scanner

Q_1 se numeşte **cuartila inferioară** şi se determină după formula $Q_1 = x_0 + k\frac{u^{Q_1} - \sum f_p}{f_{Q_1}}$, unde u^{Q_1} este locul cuartilei inferioare dat de formula: $u^{Q_1} = \frac{\sum f_i + 1}{4}$. Celelalte mărimi ce intervin au semnificație similară cu cea de la mediană.

Q_2 este întotdeauna **mediana.**

Q_3 se numeşte **cuartila superioară** şi se determină după formula $Q_3 = x_0 + k\frac{u^{Q_3} - \sum f_p}{f_{Q_3}}$, unde u^{Q_3} este locul cuartilei superioare dat de formula: $u^{Q_3} = \frac{3\left(\sum f_i + 1\right)}{4}$.

Analog se pot determina cuantilele de ordin superior, cum ar fi decilele (care împart seria în 10 de părți egale) şi centilele (care împart seria în 100 de părți egale).

4. Indicatori ai asimetriei

- ***Indicatorii absoluți ai asimetriei*** *sunt:*

$$A_s = \bar{x} - Mo \text{ sau } A_s^{'} = 3\left(\bar{x} - Me\right).$$

Ei pot lua valori negative sau pozitive după cum asimetria este negativă sau pozitivă. Pentru interpretarea simetriei cel mai des se utilizează **coeficientul de asimetrie Peason** calculat ca raportul dintre asimetria absolută şi abaterea medie pătratică $C_{as} = \frac{A_s}{\sigma}$. El poate fi scris şi pe baza relației dintre medie şi mediană: $C_{as}^{'} = \frac{A_s^{'}}{\sigma}$.

Observație. Dacă seria este perfect simetrică atunci coeficientul de asimetrie este nul.

Scanned with OKEN Scanner

Exemple.

1. O companie de medicamente are un departament de cercetare şi invenţie a medicamentelor pentru slăbit unde este în curs de descoperire un produs revoluţionar. Pentru testarea lui se folosesc 60 de exemplare dintr-o specie comuna de cobai. Pentru a studia scăderea în greutate a celor 60 de cobai, considerată ca relevantă pentru studiul substanţei active a medicamentului, s-au înregistrat greutăţile lor (în grame), după 31 de zile de "tratament".

1. Efectuaţi gruparea elementelor colectivităţii pe variante şi calculaţi media, mediana şi modul pentru fiecare caracteristică în parte.
2. Efectuaţi gruparea datelor pe 5 intervale egale şi:
   - efectuaţi graficul specific şi poziţionaţi pe aceasta indicatorii medii ai tendinţei centrale;
   - calculaţi şi interpretaţi indicatorii variaţiei;
   - calculaţi şi interpretaţi indicatorii de asimetrie;
   - calculaţi şi interpretaţi gradul de concentrare.

120	116	94	120	112	112	106	102	118	112
116	98	116	114	120	124	112	122	110	95
106	122	124	112	118	128	108	120	110	106
106	102	140	102	122	112	110	130	112	114
108	110	116	118	118	108	102	110	104	112
122	112	116	110	112	118	98	104	120	106

Soluţie.

1. Gruparea datelor pe variante de variaţie:

Scanned with OKEN Scanner

Nr. crt.	Greutatea (gr.) x_i	Frecvența de apariție f_i
1	94	1
2	95	1
3	98	2
4	102	4
5	104	2
6	106	5
7	108	3
8	110	6
9	112	10
10	114	2
11	116	5
12	118	5
13	120	5
14	122	4
15	124	2
16	128	1
17	130	1
18	140	1
Total		60

Media aritmetică: $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{6767}{60} = 112,78$ gr.

Mediana (avem nr. par de termeni deci va fi dată de media aritmetică a termenilor din mijlocul şirului ordonat crescător):

$$Me = \frac{112+112}{2} = 112 \text{ gr.}$$

Modul (valoarea cu frecvența cea mai mare): $Mo = 112$.

Scanned with OKEN Scanner

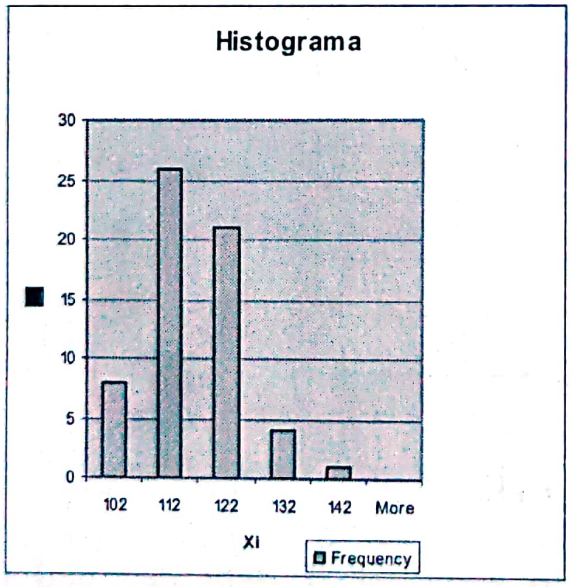
2. Grupăm datele pe cinci intervale egale.

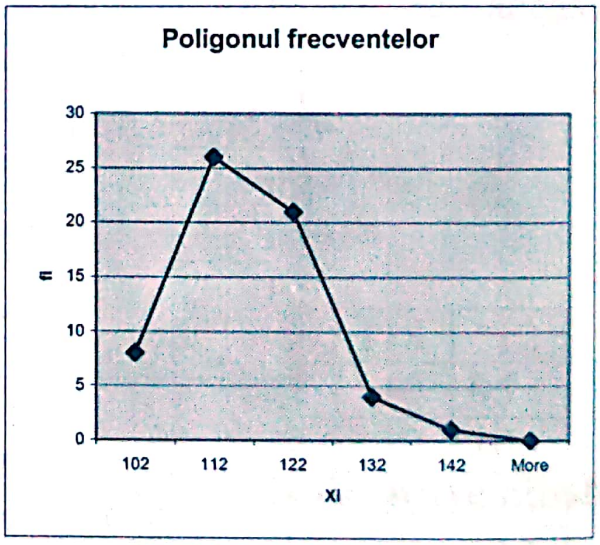
Lungimea aproximativă a intervalului va fi dată de:

$$\frac{x_{max} - x_{min}}{5} = \frac{140 - 94}{5} = 9,2 \approx 10.$$

Gruparea cobailor după greutate:

Nr. crt.	Intervalul	Numărul cobailor
1	(92;102]	8
2	(102;112]	26
3	(112;122]	21
4	(122;132]	4
5	(132;142]	1





Analiza indicatorilor tendinței centrale

Scanned with OKEN Scanner

Media aritmetică (formula simplificată): $\bar{x} = \frac{\sum\left(\frac{x_i - a}{k}\right) f_i}{\sum f_i} \cdot k + a$,

unde a este mijlocul intervalului cu frecvența cea mai mare, iar k este lungimea intervalului.

Înlocuim $a = \frac{102+112}{2} = 107$; $k = 10$ şi obținem: $\bar{x} = \frac{24}{60} \cdot 10 + 107 = 111$.

Media armonică: $\bar{x}_h = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{1}{x_i} f_i} \Rightarrow \bar{x}_h = \frac{60}{0.5437} = 110,35$.

Media pratică: $\bar{x}_p = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i}} \Rightarrow \bar{x}_p = \sqrt{\frac{743700}{60}} = 111,33$.

Media geometrică:

$$\bar{x}_g = \sum^{f_i}\sqrt{\prod x_i f_i} = \frac{1}{\sum f_i}\sum(f_i \lg x_i) \Rightarrow \bar{x}_g = \frac{122,642}{60} = 2,044.$$

$$\bar{x}_a = 10^{2,044} = 110,66.$$

Din aceste calcule se observă că $\bar{x}_h < \bar{x}_g < \bar{x} < \bar{x}_p$.

Calculul indicatorilor medii de poziție

Modul (dominanta seriei)

- $Mo = x_0 + k\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \Rightarrow Mo = 102 + 10\frac{18}{18+5} = 109,826$;
- $\Delta_1 = f_{Mo} - f_{Mo-1} = 26 - 8 = 18$;
- $\Delta_2 = f_{Mo} - f_{Mo+1} = 26 - 21 = 5$.

Valoarea medie a greutăților cel mai des întâlnite la nivelul celor 60 de cobai este 109,826.

Cuantile

- **Mediana**: $u^{Me} = \frac{\sum f_i + 1}{2} = \frac{61}{2} = 30,5$, de unde rezultă că intervalul median este (102,112], iar

Scanned with OKEN Scanner

$$Me = x_0 + k\frac{u^{Me} - \sum f_p}{f_{Me}} \Rightarrow Me = 102 + 10\frac{30,5 - 8}{26} = 110,654.$$

Din cei 60 de cobai aproximativ 50% au greutatea medie de până la 110,654 gr., iar restul de peste 110,654 gr..

- **Quartilele:** $u^{Q_1} = \frac{\sum f_i + 1}{4} = \frac{61}{4} = 15,25$; intervalul este (102;112]

$$Q_1 = x_0 + k\frac{u^{Q_1} - \sum f_p}{f_{Q_1}} \Rightarrow Q_1 = 102 + 10\frac{15,25 - 5}{26} = 105,9423$$

$u^{Q_2} = mediana$

$u^{Q_3} = \frac{3\left(\sum f_i + 1\right)}{4} = \frac{3 \cdot 61}{4} = 45,75$; intervalul este (112;122], de unde

$$Q_3 = x_0 + k\frac{u^{Q_3} - \sum f_p}{f_{Q_3}} \Rightarrow Q_3 = 112 + 10\frac{45,75 - 34}{21} = 117,60 \text{ gr.}$$

Din cei 60 de cobai 75% au greutatea de pînă la 117,60 gr., iar restul de 25% de peste 117,60 gr.

- **Decilele:** $u^{D_1} = \frac{\sum f_i + 1}{10} = \frac{61}{10} = 6,1$; intervalul este (92;102].

$$D_1 = x_0 + k\frac{u^{D_1} - \sum f_p}{f_{D_1}} \Rightarrow D_1 = 92 + 10\frac{6,1 - 0}{8} = 99,625$$

Din cei 60 de cobai 10% au greutatea de până la 99,625 gr., iar restul de peste 99,625 gr.

$D_5 = mediana$

$u^{D_9} = \frac{9\left(\sum f_i + 1\right)}{10} = \frac{549}{10} = 54,9$, intervalul este (112;122]

$$D_9 = x_0 + k\frac{u^{D_9} - \sum f_p}{f_{D_9}} \Rightarrow D_9 = 112 + 10\frac{54,9 - 34}{21} = 121,952.$$

Din cei 60 de cobai 90% au greutatea de până la 121,952 gr, iar restul de peste 121,952 gr.

- **Mediala:** $u^{M_i} = \frac{\sum x_i f_i}{2} = \frac{6660}{2} = 3330$, intervalul este (102;112]

Scanned with OKEN Scanner

$$M_l = x_0 + k\frac{u^{D_0} - \sum x_i f_p}{xf_{M_l}} \Rightarrow M_l = 102 + 10\frac{3330 - 776}{2782} = 111{,}180$$

Indicatorii variației

Indicatorii individuali ai variației

- Amplitudinea variației: $A = x_{\max} - x_{\min} = 142 - 92 = 50$.
- Abaterea individuală: $d_i = x_i - \overline{x}$, iar rezultatele sunt trecute în tabelul 2.

Indicatori relativi

- Amplitudinea relativă a variației:

$$A_{\%} = \frac{A}{\overline{x}} \cdot 100 = \frac{50}{111} \cdot 100 = 45{,}045.$$

- Abaterea relativă individuală: $d_{i\%} = \frac{d_i}{\overline{x}} \cdot 100$, rezultatele sunt trecute în tabelul 2.

Indicatori sintetici ai variației

- Abaterea medie liniară: $\overline{d} = \frac{\sum |x_i - \overline{x}| f_i}{\sum f_i} = \frac{432}{60} = 7{,}2$.
- Dispersia: $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 f_i}{\sum f_i} = \frac{4440}{60} = 74$.
- Abaterea medie pătratică:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 f_i}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{4440}{60}} = 8{,}6.$$

- Coeficientul de variație: $V = \frac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100 = \frac{8{,}6}{111} \cdot 100 = 7{,}75\%$.

Fiind cuprins în intervalul $(0;17\%)$ coeficientul atestă faptul că media este strict reprezentativă pentru seria de distribuție.

Intervalul mediu de variație:

- Calculat cu abaterea liniară medie:

$$(111 - 7{,}2; 111 + 7{,}2) = (103{,}8; 118{,}2).$$

Scanned with OKEN Scanner

- Calculat cu abaterea medie pătratică:

$$(111-8,6;111+8,6)=(102,4;119,6)$$

Indicatorii de asimetrie

Indicatori absoluți ai asimetriei

- $A_s=\bar{x}-Mo=111-109,826=1,174gr$.
- $A_s^{'}=3(\bar{x}-Me)=3(111-110,654)=1,038gr$.
- Coeficientul empiric de asimetrie Pearson:

$$C_{as}=\frac{A_s}{\sigma}=\frac{1,174}{8,6}=0,136\in(0;\pm1)$$

$$C_{as}^{'}=\frac{A_s^{'}}{\sigma}=\frac{1,038}{8,6}=0,120\in(0;\pm3).$$

- Coeficientul de asimetrie Pearson $\beta_1=\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$ unde $\mu_2=\sigma^2$, iar $\mu_3=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^3\cdot f_i}{\sum f_i}=\frac{14880}{60}=248$, conform tabelului 3 şi vom obține:

$$\beta_1=\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}=\frac{248^2}{74^3}=\frac{61504}{405224}=0,152.$$

Gradul de concentrare

Determinăm concentrarea cu ajutorul indicatorului abaterea medială- mediană în mărime absolută şi relativă:

$$A=M_l-Me=111,180-110,654=0,526$$

$$A_{\%}=\frac{A}{A_{\max}}\cdot100=\frac{0,526}{50}\cdot100=1.052\%\in(0;100\%),$$

de unde rezultă un grad redus de concentrare a greutăților la nivelul grupelor.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VIII

ELEMENTE DE MATEMATICI ACTUARIALE

8.1. Asigurări de viaţă

Matematica care se ocupă cu asigurările de persoane poartă numele de *"matematici actuariale"*. Termenul de **actuariat** reprezintă totalitatea operatiunilor financiare pe baza cărora se fac calcule de asigurări, folosindu-se teoria probabilităţilor şi statistica matematică.

În calculele diferitelor tipuri de asigurări de viaţă apar anumiţi factori reprezentaţi prin constante statistice, ce inflenţează calculul primelor de asigurări.Aceste constante sunt verificate şi îmbunătăţite continuu de către firmele de asigurări.

Cel mai important factor privind asigurările de viaţă este mortalitatea persoanelor ce este la rândul ei influenţată de alţi factori precum vârsta, sexul, profesia, regiunea, etc. Cel ce a studiat pentru prima dată mortalitatea populaţiei a fost J. Bernoulli ce a dat un model matematic de mare generalitate pentru fenomenele vieţii. Intensitatea mortalităţii unui grup de persoane se măsoară cu ajutorul unor coeficienţi numerici numiţi **functii biometrice.** Cel mai important factor în determinarea mortalităţii este vârsta, dar calculele actuariale nu pot neglija ceilalti factori.

Dacă considerăm o populaţie formată din indivizi de acceaşi vârstă de r ani, notată cu R şi fie A evenimentul ca o persoană din populaţia R să fie în viaţă la împlinirea vârstei de r+1 ani, iar $\overline{A}$ evenimentul ca o persoană din R să nu mai fie în viaţă la împlinirea vârstei de r+1 ani. Probabilitatea evenimentului A o

Scanned with OKEN Scanner

vom numi **probabilitate de viață** şi o vom nota P(A)=p(r,r+1)=p, iar probabilitatea evenimentului $\overline{A}$ o vom numi **probabilitate de deces** şi o vom nota P($\overline{A}$)=q(r,r+1)=q. Deoarece evenimentele A şi $\overline{A}$ sunt evenimente contrare, atunci :

$$p_r + q_r = 1$$

Dacă notăm probabilitatea ca o persoană în vârstă de **r** ani să fie în viață la împlinirea vârstei de **s** ani cu p(r,s), iar probabilitatea ca o persoana in vărsta de r ani să nu mai fie în viață la împlinirea varstei de s ani cu q(x,y), atunci are loc relatia:

$$p(r,s)+q(r,s)=1$$

Considerăm **t** o vârstă cuprinsă între **r** şi **s** ani , atunci o persoană în vârstă de **r** ani să fie în viață la împlinirea vârstei de **s** ani trebuie mai întai să fie în viață la împlinirea varstei de **t** ani. Vom nota cu A evenimentul ca persoana să fie în viață la implinirea vârstei de **t** ani şi cu B evenimentul ca persoana să fie în viață la împlinirea vârstei de **s** ani şi va rezulta:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$$

sau

$$p(r,s) = p(r,t)\cdot p(t,s)$$

Putem generaliza acest rezultat şi astfel vom obține:

$$p(r,s) = p(r,r+1)\cdot p(r+1,r+2)\cdot\ldots\cdot p(s-1,s)$$

sau

$$p(r,s) = p_r p_{r+1}\ldots p_{s-1}$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie o populație formată din u_a persoane de aceeaşi vârstă de ani. Numărul de persoane care ajung să împlinească vârsta de **x** ani **(x>a)** din cele u_a persoane, este o variabilă aleatoare discretă de forma:

$$X:\begin{pmatrix} 0\ 1\ 2.....k.....u_a \\ p_0\ p_1\ p\ .....p_k....p_{n_a} \end{pmatrix}$$

cu: 1. $p_k \geq 0, k = 0,1,.....u_a$

2. $\sum_{k=0}^{n_a} p_{k=1} = 1$

Dacă toate persoanele în vârstă de **a** ani cu aceeaşi probabilitate p(a,x) de a fi în viață la împlinirea vârstei de **x** ani, variabila aleatoare X urmează legea binomială:

$$p_k = C_{n_a}^k p(a,x)^k q(a,x)^{n_a-k}$$

Vom numi **funcție de supraviețuire**, valoarea medie a numărului de persoane care ajung să împlinească vârsta de **x** ani şi o vom nota cu u_x.

$$u_x = M(x)$$

Atunci:

$$u_x = u_a \cdot p(a,x)$$

deoarece $M(x) = n \cdot p$, iar $n = u_a, p = p(a,x)$.

Rezultă că probabilitatea de viață este :

$$p(a,x) = \frac{u_x}{u_a}$$

Dacă a < x < y, din relația

$$p(a,y) = p(a,x) \cdot p(x,y)$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă:

$$p(x,y)=\frac{p(a,y)}{p(a,x)}=\frac{u_y}{u_a}\cdot\frac{u_a}{u_x}=\frac{u_y}{u_x}$$

Astfel relația $p(x,y)=\frac{u_y}{u_x}$ ne permite să calculăm probabilitatea ca o persoana în vârstă de **x** ani să fie în viață la împlinirea vârstei de **y** ani dacă se cunosc valorile u_x, u_y.

În continuare vom arăta că funcția de supraviețuire este descrescătoare în raport cu vârsta.

Dacă y=x+m , atunci:

$$p(x,x+m)=\frac{u_{x+m}}{u_x}$$

Dar

$$q(x,y)=1-p(x,y),$$

deci rezultă

$$q(x,y)=\frac{u_x-u_{x+m}}{u_x}$$

iar

$$q(x,x+m)=\frac{u_x-u_{x+m}}{u_x}$$

Pentru m=1 :

$$p_x=p(x,x+1)=\frac{u_{x+1}}{u_x}$$

$$q(x,x+1)=\frac{u_x-u_{x+1}}{u_x}=\frac{d_x}{u_x}$$

Cu d_x egal cu numărul de persoane care au decedat între x şi x+1 ani

Cum $0<p_x<1$, atunci:

Scanned with OKEN Scanner

$$0 < \frac{u_{x+1}}{u_x} < 1$$

sau

$$0 < u_{x+1} < u_x$$

ceea ce arată că funcția de supraviețuire este descrescătoare.

Vom numi **viață medie**, valoarea medie a numărului de ani pe care are să-i mai trăiască o persoană în vârstă de **x** ani, notată cu m_x.

Dacă numărul de ani pe care îi mai trăieşte o persoană în vârstă de **x** ani este o variabilă aleatoare **X** şi presupunând că data decesului din intervalul (x+t, x+t+1) este la mijlocul intervalului, corespunzător faptului că decesele sunt distribuite uniform în timpul anului, variabila aleatoare **X** are repartiția :

$$X : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2} & 2+\frac{1}{2} & \ldots\ldots n+\frac{1}{2} & \ldots\ldots \\ q_x & \frac{1}{2}q_x & \frac{2}{3}q_x & \ldots\ldots \frac{n}{n+1}q_x & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

Atunci

$$M(X) = m_x = \frac{1}{2}q_x + \frac{3}{2}\frac{1}{2}q_x + \ldots + (n+\frac{1}{2})\frac{n}{n+1}q_x + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{c-x}(n+\frac{1}{2})\frac{n}{n+1}q_x = \sum_{n=0}^{c-x}(n+\frac{1}{2})\frac{u_{x+n}-u_{x+n+1}}{u_x} = \frac{1}{2} + \frac{\sum_{n=1}^{c-x}u_{x+n}}{u_x}$$

Dacă se neglijează $\frac{1}{2}$ se obține viața medie redusă.

Scanned with OKEN Scanner

8.2. Asigurări de persoane

Scopul acestor asigurări este să ofere persoanelor şi familiilor lor garanţii materiale care să-i pună la adăpost de consecinţele anumitor evenimente, cum ar fi: pierderea capacităţii de muncă parţială sau totală, decesul.

În cazul asigurărilor de persoane, asiguratul plăteşte taxele de asigurare atâta timp cât este în viaţă sau până la expirarea termenului de asigurare. La producerea unui accident, asiguratorul plăteşte suma asigurată. Taxele plătite de asigurat instituţiei de asigurare se numesc **prime de asigurări**.
Aceste prime se pot plăti periodic (lunar, trimestrial, anual) sau o dată pentru tot timpul asigurării.

Primele de asigurare se calculează folosind ecuaţii stabilite pe baza unei egalităţi între valorile medii actuale ale sarcinilor celor două părţi, la momentul iniţial al asigurării. Aceste prime se numesc **prime matematice** sau **nete.** La determinarea lor se va ţine seama de posibilitatea plăţilor ce urmează a fi efectuate de asigurator cât şi de faptul că fondurile constituite de acesta fiind temporar disponibile, se află în circuitul economic şi îi aduc venituri ce pot duce la micşorarea corespunzătoare a primei de asigurare.

Valoarea medie a primelor plătite de asigurat evaluată la momentul începerii asigurării se numeşte **primă unică**.

Fie A o asigurare de viaţă compusă din asigurările parţiale $A_1, A_2, ..., A_n$. Notăm cu $P_1, P_2, ..., P_n$, primele corespunzătoare acestor asigurări parţiale. Fie **X** valoarea actuală a sumelor pe care urmează să le încaseze instituţia de asigurare pentru asigurarea A şi X_i valoarea actuală a sumelor ce urmează a fi încasate pentru asigurarea $A_i, \mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{n}$.

Deoarece primele de asigurare sunt valori medii ,

Scanned with OKEN Scanner

avem

$$P = M(X), P_i = M(X_i), i = 1,2,3,...,n$$

Cum $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$

rezultă $M(X) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)$

adică valoarea primei totale pentru asigurarea A este

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n$$

Dacă o persoană în vârstă de x ani încheie o asigurare în caz de supraviețuire în valoare de 1 u.m. cu plata sumei peste n ani, ne interesează valoarea primei nete ce urmează să o plătească asiguratul. Astfel prima corespunzătoare este o valoare medie

$P = M(X)$, cu $X : \begin{pmatrix} v^n & 0 \\ np_x & nq_x \end{pmatrix}$ valoarea actuală a sumei pe care o va primi peste n ani.

Atunci $M(X) = v^n \cdot np_x = v^n \cdot \frac{u_{x+n}}{u_x}$, valoarea medie ce se mai numeşte **factor de actualizare viager**. El se mai scrie:

$$M(X) = v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{v^x}{v^x} = \frac{v^{x+n} \cdot l_{x+n}}{v^x l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x},$$

unde D_x este **numărul de comutaţie** ce se găseşte in tabelele actuariale pentru toate vârstele.

Pentru asigurarea unei sume S u.m. , prima netă va fi

$$P = S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Exemplu:

O persoană în vârstă de 30 de ani contractează o asigurare în valoare de 300000 unităţi monetare plătibilă în caz de supraviețuire la împlinirea vârstei de 65 ani. Care este prima unică pe care trebuie să o plătească pentru această asigurare, procentul fiind de 7% ?

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie :

Ştim că $P = S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}$, adică $P = 300 \cdot \frac{D_{65}}{D_{30}}$

Aceste plăți periodice sunt certe, ele plătindu-se la scadență. Mai există un tip de plăți periodice numite **viagere** în care plățile se fac cu condiția ca persoana care trebuie să le încaseze să fie în viață.

Dacă sumele asigurate se plătesc anual, plățile periodice viagere se numesc **anuități viagere.**

Ne propunem să calculăm prima a_x pe care trebuie să o plătească un asigurat în vârstă de x ani pentru a primi 1 u.m. la sfârşitul fiecărui an pe toată durata vieții. Asiguratul trebuie să plătească $E_x^1, E_x^2, ..., E_x^{t-x}$, unde t este vârsta limită a vieții persoanei asigurate.

Atunci

$$a_x = E_x^1 + E_x^2 + ... + E_x^{t-x}$$

sau $$a_x = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + ... + \frac{D_t}{D_x}$$

Din tabelele actuariale luăm numarul de comutație

$$N_x = D_x + D_{x+!} + ... + D_t$$

şi rezultă $$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Pentru o sumă asigurată anual S u.m., prima unică va fi

$$P = S \cdot a_x = S \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Exemplu:

Care va fi prima unică pe care trebuie să o plătească un asigurat în vârstă de 50 de ani în momentul încheierii asigurării pentru a primi tot restul vieții, la sfârşitul anului câte 1000 u.m., procentul fiind 3%

Scanned with OKEN Scanner

Soluție:

$$P = S\frac{N_{x+1}}{D_x} = 1000 \cdot \frac{N_{51}}{D_{50}}$$

Dacă însă persoana ar urma să primească S u.m. pe toată durata vieții la începutul fiecărui an, atunci prima unică pe care trebuie să o plătească o persoană în vârstă de x ani se va calcula cu formula

$$P = S \cdot a_x = S\frac{N_x}{D_x},$$

deoarece $a_x = \frac{N_x}{D_x}$

8.3. Asigurarea de deces

În cazul acestui tip de asigurare, ne interesează suma pe care urmează să o plătească o persoană în vârsta de x ani pentru ca la data morții sale, societatea de asigurare să plătească urmaşilor o sumă de bani fixată numită **suma asigurată**.

Deoarece riscurile celor două părți sunt egale, rezultă că în momentul încheierii asigurării, prima unică este egală cu valoarea actuală a sumei asigurate.

Daca notăm cu A_x valoarea medie actuală a unui leu plătit la data decesului unei persoane în vârstă de x ani, iar $v^{\frac{1}{2}}, v^{1+\frac{1}{2}}, \ldots, v^{n+\frac{1}{2}}, \ldots$, valorile actuale ale unui leu plătit în primul an, în al doilea ,ş.a.m.d., la mijlocul acestor ani, după cum decesul are loc în primul an, în al doilea, etc.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci variabila aleatoare X va avea repartiția:

$$X:\begin{pmatrix} v^{\frac{1}{2}} & v^{1+\frac{1}{2}} & \ldots\ldots\ldots\ldots & v^{n+\frac{1}{2}} & \ldots\ldots\ldots \\ \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} & \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} & \ldots & \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x} & \ldots \end{pmatrix}$$

Valoarea medie actuală a asigurării de deces este :

$$A_x = M(x) = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \cdot v^{\frac{1}{2}} + \ldots. + \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x} v^{n+\frac{1}{2}} + \ldots$$

Dacă $C_x = (1_x - 1_{x+1}) v^{x+\frac{1}{2}}$

atunci $A_x = \frac{M_x}{D_x}$

unde $M_x = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_t$

iar prima unică va fi:

$$P_x = S \cdot A_x = S \frac{M_x}{D_x}, \text{ cu S u.m}$$

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. V. Blănuță, O. Pricopie – **Elemente de algebră liniară şi geometrie analitică**, Ed. Fundației Humanitas, 2001.
2. V. Blănuță, V. Nimineț - **Elemente de algebră liniară**, Ed. Cermi, Iaşi, 2005
3. S. Chiriță – **Probleme de matematici superioare**, EDP, Bucureşti, 1989.
4. V. Diaconița, A. Manolachi, Gh. Rusu – **Matematici aplicate în economie**, Ed. Fundației „Chemarea", 1992.
5. C. Dochițoiu, A. Matei – **Matematici economice generale**, Ed. Economică, Bucureşti, 1995.
6. A. Filip, S. Hoțulete, S. Winaroschi – **Matematici speciale aplicate în economie**, Vol. II, 1986.
7. D. A. Filip – **Calcule financiare**, Ed. Dacia, 2000.
8. I.Iacob - **Matematici financiare**, Ed.Scriptor, Galați, 1996.
9. Gh. Mihoc, G. Cincu, V. Craiu – **Teoria probabilităților şi statistică matematică**, EDP, 1970.
10. V. Nimineț - **Matematici pentru economişti**, Ed. Moldavia, 2003 .

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Cap. I Elemente de algebră liniară cu aplicații în economie

1. Transformări elementare. Sisteme algebrice de ecuații liniare.....3
2. Spații vectoriale. Spații economice organizate ca spații vectoriale.....21
3. Aplicații liniare.....82
4. Spații euclidiene. Analiza structurii agenților economici...110
5. Forme multiliniare.....138
6. Aplicații propuse.....157

Cap. II Elemente de programare liniară

1. Mulțimi convexe.....163
2. Obiectul programării liniare.....173
3. Rezolvarea problemelor de programare liniară..... 175
4. Metoda simplex și algoritmul simplex primal.....183
5. Aplicații propuse.....189

Scanned with OKEN Scanner

Cap. III Elemente de analiză matematică economică

1. Funcţii de mai multe variabile şi aplicaţii economice.....193
2. Puncte de extrem ale funcţiilor de mai multe variabile şi aplicaţii economice.....199
3. Aplicaţii propuse.....203

Cap. IV Ecuaţii diferenţiale şi aplicaţii în modelarea dinamicii proceselor economice. Ecuaţii diferenţiale de ordinul I.....205

Cap. V Ecuaţii diferenţiale de ordin superior.....239

Cap. VI Elemente de matematici financiare

1. Dobânda simplă.....263
2. Dobânda compusă.....267
3. Plasament cu dobânda simplă sau compusă.....270
4. Devalorizarea monedei.....271
5. Plăţi eşalonate.....273
6. Taxa pe valoarea adăugată.....275
7. Aplicaţii propuse.....277

Cap. VII Elemente de teoria probabilităţilor şi statistică.....283

Cap. VIII Elemente de matematici actuariale

1. Asigurări de viată.....385
2. Asigurări de persoane.....390

Scanned with OKEN Scanner

3. Asigurări de deces.....393

Bibliografie.....395

Scanned with OKEN Scanner

Valer Nimineț este conferențiar universitar la Catedra de Matematică – Informatică a Universității din Bacău. Este doctor în matematică al Universității „Al. I. Cuza" din Iași.

A publicat singur sau în colaborare 16 cărți și manuale universitare în edituri acreditate CNCSIS. Activitatea științifică constă în publicarea a peste 30 de lucrări științifice recenzate în baze de date internaționale precum și în participarea la conferințe naționale și internaționale de specialitate.

ISBN 973-116-096-5
9 789731 160962

Scanned with OKEN Scanner